<u>Exercice 1 :</u> Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

1. On note M : l'événement « l'animal est malade »

La maladie touche 0,5% du cheptel donc $\mathbf{P(M)} = \dfrac{0,5}{100} = \mathbf{5.10^{-3}}$

2. a) On est en présence d'un tirage successif indépendant avec deux issues possibles, soit l'animal est malade soit il n'est pas malade. **La variable aléatoire X égale au nombre d'animaux malades suit donc une loi binomiale de paramètre :**

$$\mathbf{n = 10 \text{ et } p = P(M) = 5.10^{-3}.}$$

Son espérance est : $\mathbf{E(X) = np = 5.10^{-2}}$

b) $\mathbf{P(A)} = (1 - P(M))^{10} = 0,995^{10} = \mathbf{0,951}$

B est l'événement contraire de A donc $\mathbf{P(B)} = 1 - P(A) = \mathbf{0,049}$

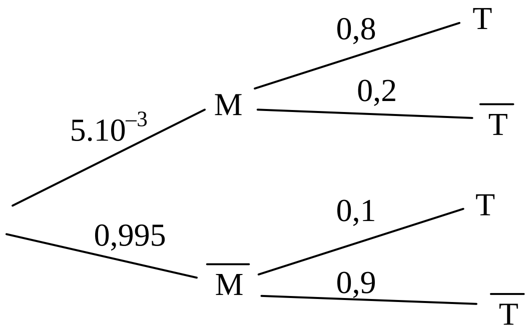
3. a) Arbre pondéré :

$P(M) = 5.10^{-3}$

$P(\overline{M}) = 0,995$

$P_M(T) = 0,8$

$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,9$



b) On cherche à calculer P(T)

M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers donc :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\ &= P_M(T) \times P(M) + P_{\overline{M}}(T) \times P(\overline{M}) \\ &= 0,8 \times 5.10^{-3} + 0,1 \times 0,995 \\ &= \mathbf{0,1035} \end{aligned}$$

c) On cherche à calculer $P_T(M)$

$\mathbf{P_T(M)} = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)} = \dfrac{0,8 \times 5.10^{-3}}{0,1035} = \mathbf{0,038}$ Rq : Ce test est peu fiable.

<u>Exercice 2 :</u> Sur 5 points (*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

Partie A

1. a) Si z = 1 : $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 1 - (4 + i) + (7 + i) - 4 = 0$

(E) admet une solution réelle qui est $\mathbf{z_1 = 1.}$

Autre méthode : soit z = b une solution réelle de (E).

(E) devient : $b^3 - (4 + i)b^2 + (7 + i)b - 4 = 0$

Soit $\begin{cases} b^3 - 4b^2 + 7b - 4 = 0 \\ -b^2 + b = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b^3 - 4b^2 + 7b - 4 = 0 \\ b = 0 \text{ ou } b = 1 \end{cases}$

b = 0 n'est pas solution de la première équation.

Donc l'équation (E) admet une solution réelle qui est $\mathbf{z_1 = 1}$

b) Pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned}(z - z_1)(z - 2 - 2i)(az + b) &= (z - 1)(z - 2 - 2i)(az + b)\\ &= (z^2 - 2z - 2iz - z + 2 + 2i)(az + b)\\ &= az^3 + (b - 2a - 2ia - a)z^2 + (2a + 2ia - 2b - 2ib - b)z + (2b + 2ib)\\ &= az^3 + (b - 3a - 2ia)z^2 + (2a - 3b + i(2a - 2b))z + 2b(1 + i).\end{aligned}$$

Par identification avec $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a - 2ia = -(4 + i) \\ 2a - 3b + i(2a - 2b) = 7 + i \\ 2b(1 + i) = -4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \mathbf{a = 1} \\ \mathbf{b = -1 + i} \end{cases}$$

Donc $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - 1)(z - 2 - 2i)(z - 1 + i)$

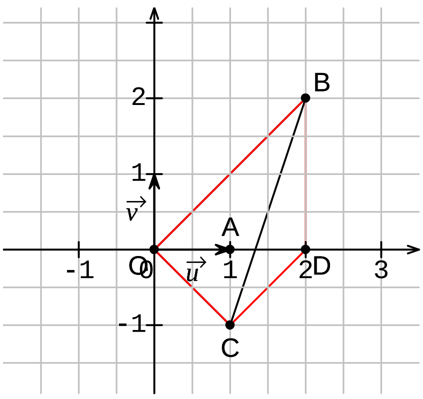
2. $z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z - 2 - 2i)(z - 1 + i) = 0$

$\Leftrightarrow z = 1$ ou $z = 2 + 2i$ ou $z = 1 - i$

L'équation (E) admet pour solution : {1 ; 2 + 2i ; 1 – i }

Partie B

1.



2. $\dfrac{2 + 2i}{1 - i} = \dfrac{(2 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{2 + 2i + 2i - 2}{2} = 2i$

donc : $\left|\dfrac{\mathbf{2 + 2i}}{\mathbf{1 - i}}\right| = |2i| = \mathbf{2}$ **et** $\mathbf{arg}\left(\dfrac{\mathbf{2 + 2i}}{\mathbf{1 - i}}\right) = \arg(2i) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]}$

On a $\dfrac{2 + 2i}{1 - i} = \dfrac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$

Donc $\arg\left(\dfrac{2 + 2i}{1 - i}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right) = (\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OB})[2\pi]$ donc $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Le triangle OBC est donc un triangle rectangle en O.

3. $z_B = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; un argument de z_B est $\dfrac{\pi}{4}$ donc $(\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$z_C = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; un argument de z_C est $-\dfrac{\pi}{4}$ donc $(\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{OC}) = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

L'argument de A est un réel positif donc $(\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})\ [2\pi]$ et

$(\overrightarrow{u} ; \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC})\ [2\pi]$

La droite (OA) coupe l'angle $\widehat{COB}$ en deux angles égaux, c'est donc **une bissectrice du triangle OBC.**

4. D est l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C donc :

$z_D - z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_C)$ $\quad\quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
$z_D = i \times z_C + z_C$
$z_D = z_C(i + 1)$
$z_D = (1 - i)(i + 1)$
$\mathbf{z_D = 2}$

5. $z_B - z_O = 2 + 2i$ et $z_D - z_C = 2 - 1 + i = 1 + i$
Donc $z_B - z_O = 2(z_D - z_C)$ donc $\overrightarrow{OB} = 2\,\overrightarrow{CD}$.
On en déduit que les droites (OB) et (CD) sont parallèles.
Le trapèze OCDB a un angle droit $\widehat{BOC}$, c'est donc un trapèze rectangle.
Le quadrilatère OCDB est un trapèze rectangle.

<u>Exercice 2 :</u> sur 5 points (*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

1. On a r(A) = B donc $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A$

$$= 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\mathbf{z_B = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

2. On a r(B) = C ; r(C) = D ; r(D) = E et r(E) = F
En faisant de même que pour z_B on trouve :

$z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} z_B$
$= 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
$= 3\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$\mathbf{z_C = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

$z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} z_C$
$= 3\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
$= 3\,e^{i\pi}$
$\mathbf{z_D = -3}$

$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D$
$= -3\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
$\mathbf{z_E = -\frac{3}{2} - i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

$z_F = e^{i\frac{\pi}{3}} z_E$
$= -3\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
$\mathbf{z_F = \frac{3}{2} - i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

3. a) $e^{i\frac{\pi}{3}} z_F = -3\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
$= 3$
L'image de F par r est le point d'affixe 3 soit le point A.
b) D'après la définition d'une rotation
On a OA = OB = OC = OD = OE = OF = 3
De plus $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \dfrac{\pi}{3}$
Le polygone ABCDEF est donc un hexagone régulier de centre O.

4. a) * On a s'(F) = C

Le rapport de la similitude est : $k = \frac{EC}{EF}$

L'angle de la similitude est : $\theta = (\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EC})$

$z_C - z_E = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} = i\,3\sqrt{3}$ donc $EC = 3\sqrt{3}$

$z_F - z_E = \frac{3}{2} - i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3$ donc EF = 3

Le rapport de la similitude s' est donc : $k = \sqrt{3}$

$(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EC}) = \arg\frac{z_C - z_E}{z_F - z_E} = \arg\left(i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

L'angle de la similitude s' est $\theta = \frac{\pi}{2}$

* s'o s est la composée de deux similitudes c'est donc une similitude

Or la composée de deux similitudes a pour rapport le produit des deux rapports soit $\frac{1}{2}\times\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour angle la somme des deux angles soit $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

b) Soit D' = s(D) alors :

$$z_{D'} = \frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_D - z_A\right) + z_A$$
$$= \frac{1}{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\left(-3-3\right) + 3$$
$$= -3\,e^{i\frac{\pi}{3}} + 3$$
$$= -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} + 3$$
$$= \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} = z_F$$

On a s'(F) = C

Donc s' o s(D) = C

L'image du point D par s'o s est le point C.

c) L'écriture complexe de s'o s est : z' = az + b avec $a = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ donc $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\,z + b$

Comme s'o s(D) = C alors $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\,z_D + b$

On en déduit que $b = z_C - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\,z_D$

$$= -\frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{3}{2} - \frac{9}{4} + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= -\frac{15}{4} + i\,\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

L'écriture complexe de s' o s est : $\mathbf{z' = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\ z - \frac{15}{4} + i\,\frac{9\sqrt{3}}{4}}$

5. a) A' est le symétrique de A par rapport à C donc $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

r(C) = D ; r(D) = E donc $\widehat{COE} = \frac{2\pi}{3}$.

Les points A, C et E sont sur un même cercle de centre O.

Les angles $\widehat{COE}$ et $\widehat{CAE}$ interceptent le même arc de cercle $\overset{\frown}{CE}$.

$\widehat{COE}$ est un angle au centre donc $\widehat{CAE} = \frac{1}{2}\times\ \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

De même on montre que $\widehat{ACE} = \frac{\pi}{3}$ on en déduit alors que le triangle ACE est équilatéral.

On a donc AC = AE.

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$; AC = AE et $\widehat{CAE} = \frac{\pi}{3}$ nous permettent de déduire que **s(A') = E.**

E est le centre de la similitude s' donc s'(E) = E.

Par conséquent : s' o s (A') = E

b) A' est le symétrique de A par rapport à C donc C est le milieu de [AA'].

Donc $z_C = \frac{z_A + z_{A'}}{2}$ soit $z_{A'} = 2z_C - z_A$

$$= 2\left(-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - 3$$

$$\mathbf{z_{A'} = -6 + i3\sqrt{3}}$$

L'écriture complexe de s' o s est : $z' = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\ z - \frac{15}{4} + i\,\frac{9\sqrt{3}}{4}$

Donc $z'_{A'} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\ \left(-6 + i\,3\sqrt{3}\right) - \frac{15}{4} + i\,\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\left(-6 + i\,3\sqrt{3}\right) - \frac{15}{4} + i\,\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

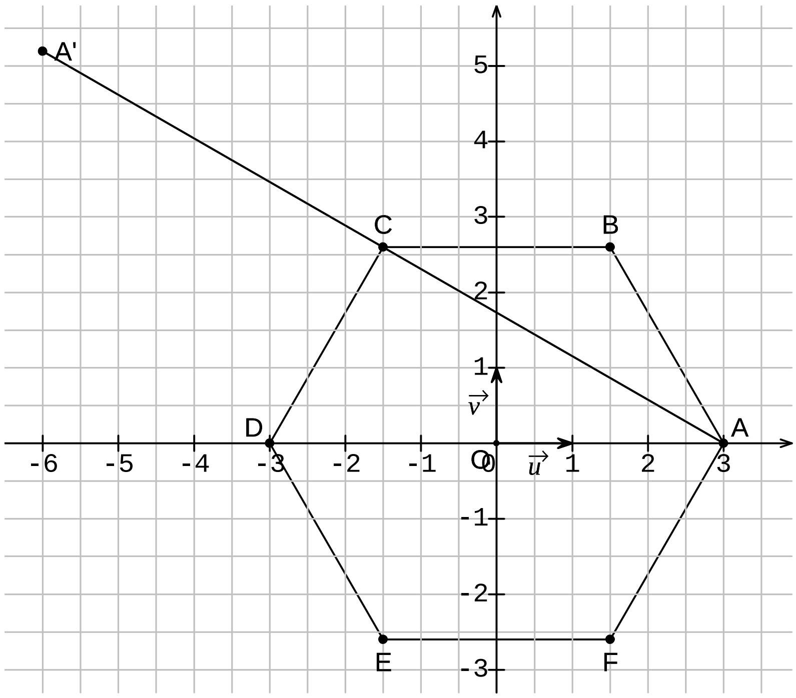
$$= \left(-\frac{3}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(-6 + i\,3\sqrt{3}\right) - \frac{15}{4} + i\,\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{9}{2} - i\frac{9\sqrt{3}}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{4} - \frac{15}{4} + i\,\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$= -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= z_E$$

Donc s' o s (A') = E. On retrouve bien le résultat du **a.**



<u>Exercice 3 :</u> sur 5 points *(commun à tous les candidats)*

1. a) f est dérivable sur $]\, 0 \,; +\infty\, [$.

Pour tout x de $]\, 0 \,; +\infty\, [$: $f\,'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^2 - 2}{x^2}$

Sur $]\, 0 \,; +\infty\, [$, x^2 est positif, $f\,'(x)$ est donc du signe de $(x^2 - 2)$.

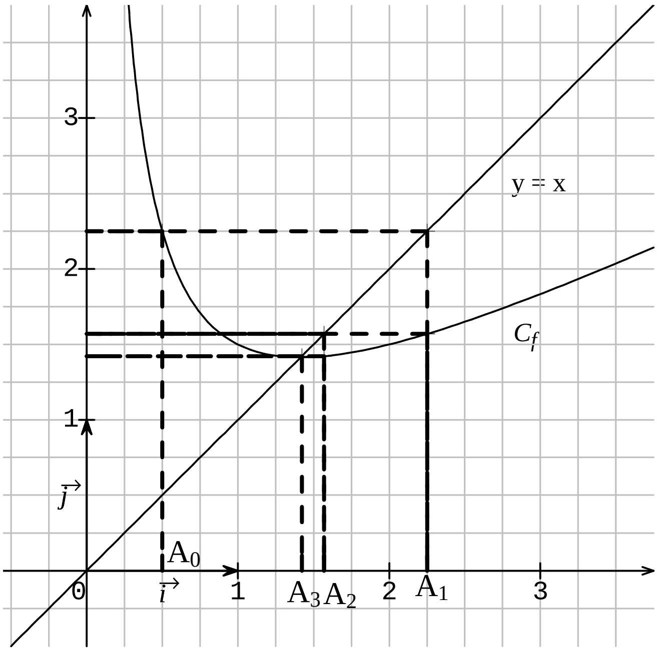
Tableau de variations de f :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f\,'$	‖	–	0	+	
$f(x)$	‖	↘	$\sqrt{2}$	↗	

Sur $]\, 0 \,; \sqrt{2}\, [$ f est décroissante.
Sur $[\, \sqrt{2} \,; +\infty\, [$ f est croissante.

$f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b)



2. a)

Sur] 0 ; $\sqrt{2}$ [, f est décroissante et sur [$\sqrt{2}$; +∞ [, f est croissante, donc f admet un minimum en $\sqrt{2}$ qui vaut $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Donc pour tout x de [$\sqrt{2}$; +∞ [, $f(x) \geq \sqrt{2}$.

Montrons par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout entier naturel n non nul :

$u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{9}{4}$, on a $u_1 \geq \sqrt{2}$

Supposons que il existe un entier naturel n non nul tel que $u_n \geq \sqrt{2}$ (rang n) :

$u_n \in [\sqrt{2} ; +\infty[$ donc $f(u_n) \geq \sqrt{2}$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on en déduit que $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$

La propriété est vraie au rang (n + 1)

Donc **pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \geq \sqrt{2}$.**

b) Pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) - x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - x$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{2 - x^2}{2x}$$

$x \geq \sqrt{2}$ donc $2 - x^2 \leq 0$ et $2x > 0$ donc $f(x) - x \leq 0$

Donc pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.

c) Pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.

Comme pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \geq \sqrt{2}$ alors :

pour tout entier naturel n non nul $f(u_n) \leq u_n$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ alors pour tout entier naturel n non nul $u_{n+1} \leq u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante à partir du rang 1.

d) La suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et est minorée par $\sqrt{2}$, **donc elle converge vers une limite L.**

3. (u_n) converge vers L avec $L \in [\sqrt{2} ; +\infty[$, f est définie et continue sur $[\sqrt{2} ; +\infty[$ donc la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $f(L)$ on en déduit que : $f(L) = L$.

L est donc solution de l'équation : $\mathbf{x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)}$

Pour tout $x \in [\sqrt{2} ; +\infty[$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{2}{x}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ car } x \in [\sqrt{2} ; +\infty[$$

La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

__Exercice 4 :__ **Sur 6 points *(commun à tous les candidats)***

Première partie

1. $A(0 ; 0 ; 3)$ donc : $7 \times 0 + 4 \times 0 - 3 \times 3 + 9 = 0$ $A \in (P_1)$
$B(2 ; 0 ; 4)$ donc $7 \times 2 + 4 \times 0 - 3 \times 4 + 9 = 11$ $B \notin (P_1)$
$C(-1 ; 1 ; 2)$ donc $7 \times (-1) + 4 \times 1 - 3 \times 2 + 9 = 0$ $C \in (P_1)$
$D(1 ; -4 ; 0)$ donc $7 \times 1 + 4 \times (-4) - 3 \times 0 + 9 = 0$ $D \in (P_1)$
Le plan (P_1) est le plan (ACD)
Réponse c).

2. Si $A(0 ; 0 ; 3) \in \Delta_1$ alors $x_A = 0 = -1 + t$ soit $t = 1$ ce qui donne $y = -6 \neq y_A$ donc $A \notin \Delta_1$
Si $B(2 ; 0 ; 4) \in \Delta_1$ alors $x_B = 2 = -1 + t$ soit $t = 3$ ce qui donne $y = -2 \neq y_B$ donc $B \notin \Delta_1$
Si $C(-1 ; 1 ; 2) \in \Delta_1$ alors $x_C = -1 = -1 + t$ soit $t = 0$ ce qui donne $y = -8 \neq y_C$ donc $C \notin \Delta_1$
Si $D(1 ; -4 ; 0) \in \Delta_1$ alors $x_D = 1 = -1 + t$ soit $t = 2$

ce qui donne $\begin{cases} y = -4 = y_D \\ z = 0 = z_D \end{cases}$ donc $D \in \Delta_1$

La droite (Δ_1) contient le point D.
Réponse d).

3. Un vecteur directeur de la droite (Δ_1) est $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1 ; 2 ; 5)$.
Un vecteur normal au plan (P_1) est $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(7 ; 4 ; -3)$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 \times 7 + 2 \times 4 + 5 \times (-3) = 0$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc orthogonaux, alors (Δ_1) et (P_1) sont parallèles.
De plus le point D est un point commun à la droite (Δ_1) et au plan (P_1) (question **1. et 2.)**, la droite (Δ_1) est donc incluse dans le plan (P_1).
Réponse b)

4. Un vecteur directeur de la droite (Δ_1) est $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (1 ; 2 ; 5).
Un vecteur directeur de la droite (Δ_2) est $\overrightarrow{u'}$ de coordonnées (2 ; 4 ; –1).
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (Δ_1) et (Δ_2) ne sont ni parallèles, ni confondues.
Regardons si elles ont un point d'intersection.
Soit I (a ; b ; c) le point d'intersection de ces deux droites ; alors les coordonnées de I vérifient les deux systèmes :

$\begin{cases} -1 + t = 7 + 2t' \\ -8 + 2t = 8 + 4t' \\ -10 + 5t = 8 - t' \end{cases}$ soit $\begin{cases} t - 2t' = 8 \\ 2t - 4t' = 16 \\ 5t + t' = 18 \end{cases}$ les 2 premières équation sont égales.

donc résolvons $\begin{cases} t - 2t' = 8 \\ 5t + t' = 18 \end{cases}$, on trouve t' = – 2 et t = 4

On remplace t par 4 dans le système d'équation paramétrique de (Δ_1) ce qui donne $\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 10 \end{cases}$

(Δ_1) et (Δ_2) admette un unique point commun, elles sont donc sécantes (donc coplanaire).

Réponse c)

5. Un vecteur normal au plan (P_1) est $\overrightarrow{v}$ de coordonnées (7 ; 4 ; – 3)
Un vecteur normal au plan (P_2) est $\overrightarrow{v'}$ de coordonnées (1 ; – 2 ; 0)
$\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles.
L'intersection de (P_1) et (P_2) est donc une droite dont la représentation paramétrique est donnée par la résolution du système :

$$\begin{cases} 7x + 4y - 3z + 9 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Pour chacune des réponses on vérifie que les coordonnées de x ; y et z en fonction de t vérifient les 2 équations.

Réponse b) $\begin{cases} 14t + 4t - 9 - 18t + 9 = 0 \\ 2t - 2t = 0 \end{cases}$

Deuxième partie

1. $\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{AM}$ (a ; 0 ; – a) et $\overrightarrow{AM}(x_M ; y_M ; z_M - 3)$ Donc **M(a ; 0 ; 3 – a)**
$\overrightarrow{BM'} = b\,\overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{BM'}$ (0 ; b ; b) et $\overrightarrow{BM'}(x_{M'} - 2 ; y_{M'} ; z_{M'} - 4)$ Donc **M'(2 ; b ; b + 4)**
Les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont donc (2 – a ; b ; a + b + 1)

2. La droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D')
si et seulement si : $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{v} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u} &= (2 - a) \times 1 + b \times 0 + (a + b + 1) \times (-1)\\ &= 2 - a - a - b - 1\\ &= -2a - b + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{v} &= (2 - a) \times 0 + b \times 1 + (a + b + 1) \times 1\\ &= b + a + b + 1\\ &= a + 2b + 1\end{aligned}$$

Donc la droite (MM') est perpendiculaire à (D) et à (D') si et seulement si le couple (a ; b) est solution du système : $\begin{cases} -2a - b + 1 = 0 \\ a + 2b + 1 = 0 \end{cases}$ **soit** $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 2a + 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b = 3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{a = 1} \\ \mathbf{b = -1} \end{cases}$

Le système $\begin{cases} \mathbf{2a + b = 1} \\ \mathbf{a + 2b = -1} \end{cases}$ admet pour solution le couple (1 ; – 1).

Les coordonnées des deux uniques points M et M', que nous noterons ici H et H', tels que la droite (HH') soit bien perpendiculaire commune à (D) et à (D') sont :
H(1 ; 0 ; 2) et H'(2 ; – 1 ; 3) (on remplace a par 1 et b par – 1 dans les coordonnées de M et de M')
HH' = $\sqrt{(2-1)^2 + (-1-0)^2 + (3-2)^2}$
Soit **HH' = $\sqrt{3}$ unités de longueur.**

4. a) M(a ; 0 ; 3 – a) et M'(2 ; b ; b + 4) donc :

$$\begin{aligned} MM'^2 &= (2-a)^2 + (b-0)^2 + (b+4-3+a)^2 \\ &= (2-a)^2 + b^2 + (a+b+1)^2 \\ &= a^2 - 4a + 4 + b^2 + a^2 + ab + a + ab + b^2 + b + a + b + 1 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a + 2b + 5 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 + 3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3}$$

b) On a $(a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0$ (= 0 dans le cas a = 1 et b = – 1) donc :
MM' $\geq \sqrt{3}$ (= $\sqrt{3}$ dans le cas a = 1 et b = – 1)
La distance MM' est donc minimale (= $\sqrt{3}$) lorsque M est en H et M' est en H'.