

Exercice 1 : Sur 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1.

a. Limite en 1 : $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+$ Par quotient $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ Par inverse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Les fonctions $x \mapsto x$ et \ln sont dérivables sur $]1 ; +\infty[$, par quotient f est dérivable sur $]1 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \text{ de }]1 ; +\infty[, f'(x) &= \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \\ &= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \end{aligned}$$

Sur $]1 ; +\infty[$, $(\ln x)^2$ est positif, donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$

$$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e$$

$$\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < e$$

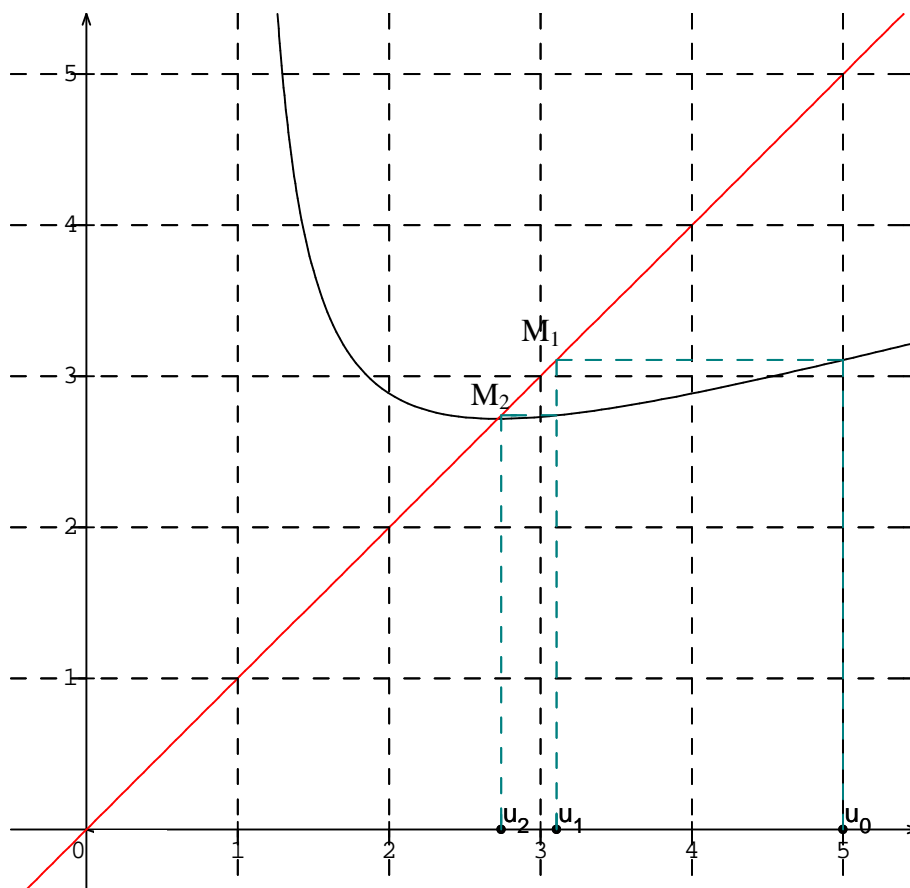
Donc :

Sur $]1 ; e[$, $f'(x)$ est négative donc f est décroissante

Sur $]e ; +\infty[$, $f'(x)$ est positive donc f est croissante

2.

a.



Au vu du graphique on peut conjecturer que **la suite (u_n) est décroissante et convergente.**

b. Sur $]1 ; e [$, f est décroissante et sur $]e ; +\infty [$, f est croissante, donc f admet un minimum en e qui vaut $f(e) = e$
Donc pour tout x de $]1 ; +\infty [$, $f(x) \geq e$.

Montrons par récurrence que $u_n \geq e$ pour tout n :

Puisque $u_0 = 5$, on a $u_0 \geq e$

Supposons que, pour tout entier naturel, $u_n \geq e$.

$u_n \in]1 ; +\infty [$ donc $f(u_n) \geq e$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ on en déduit que $u_{n+1} \geq e$

Donc **pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq e$.**

c. Prouvons que la suite (u_n) est décroissante par récurrence :

On a $u_1 = f(u_0) = \frac{5}{\ln 5} \approx 3,10$ donc $u_0 > u_1$.

Supposons que, pour tout entier naturel n , on ait $u_{n-1} > u_n$.

f est croissante sur $]e ; +\infty [$ donc $f(u_{n-1}) > f(u_n)$ ($u_n > e$ d'après la question **2.b.**)

On déduit que : $u_n > u_{n+1}$

La suite (u_n) est donc décroissante

De plus la suite (u_n) est minorée par e , donc **la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $]e ; +\infty [$.**

Partie B

1. • $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

• (u_n) converge vers ℓ , f est continue sur $]1 ; +\infty [$ donc la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

on en déduit que $f(\ell) = \ell$.

2. $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{\ell}{\ln \ell} = \ell$

$$\Leftrightarrow \ell - \ell \ln \ell = 0 \quad (\text{car } \ln \ell \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } 1 - \ln \ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = e$$

Comme $\ell \in]e ; +\infty [$, **la suite (u_n) converge donc vers $\ell = e$**

Exercice 2 : Sur 6 points.

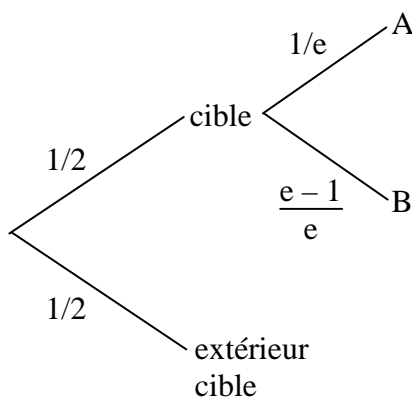
Commun à tous les candidats

Première partiePour calculer $\int_0^1 xe^x dx$ faisons une intégration par partie.Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = e^x$$

Par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e - e + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Deuxième partie**1. Probabilité d'atteindre la partie A :**La probabilité d'atteindre l'intérieur de la cible est $1/2$.

L'aire de la partie A est égale à l'intégrale calculée à la première partie soit 1

L'aire du rectangle OIMN est : $1 \times f(1) = e$.

Les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives,

Donc la probabilité d'atteindre la partie A est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{2e}$ **Probabilité d'atteindre la partie B :**La probabilité d'atteindre l'intérieur de la cible est $1/2$.L'aire de la partie B est égale à l'aire du rectangle OIMN moins l'aire de la partie A : $e - 1$ La probabilité d'atteindre la partie B est $\frac{1}{2} \times \frac{e-1}{e} = \frac{e-1}{2e}$ **2.**

a. On est dans le cas d'expériences indépendantes et identiques avec 2 issues contraires. On est donc dans un schéma de Bernoulli. Le succès est la probabilité que la fléchette atteigne la partie A avec une probabilité $p = \frac{1}{2e}$

La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = \frac{1}{2e}$

$$P(X = k) = \binom{3}{k} \times \left(\frac{1}{2e}\right)^k \times \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^{3-k}.$$

Son espérance mathématiques est $E(X) = n.p = \frac{3}{2e}$.

a. $P(E) = P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{2e}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^{3-2} = 0,083$

c. Soient C l'événement « la fléchette atteint la cible ».

B l'événement « la fléchette atteint la partie B »

$$P(C \cap B) = \frac{e-1}{2e}$$

Les fléchettes sont lancées 3 fois de manière indépendante.

Donc la probabilité que les trois fléchettes atteignent la cible et la partie B est de :

$$P(C \cap B)^3 = \left(\frac{e-1}{2e}\right)^3.$$

La probabilité qu'aucune fléchette n'atteigne l'extérieur de la cible est $P(C)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$,

Donc sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, la probabilité que toutes

les trois se trouvent dans la partie B est de : $P_C(B)^3 = \frac{P(C \cap B)^3}{P(C)^3} = \frac{\left(\frac{e-1}{2e}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{e-1}{e}\right)^3$.

3.

a. On est toujours dans le cas d'une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{2e}$ (puisque les fléchettes sont lancée n fois de manière indépendante)

La probabilité pour que aucune des fléchettes atteigne la partie A est :

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{2e}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^{n-0} = \left(\frac{2e-1}{2e}\right)^n$$

L'événement « qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A » est l'événement contraire de « aucune des fléchettes atteigne la partie A ».

Donc $p_n = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - \left(\frac{2e-1}{2e}\right)^n$$

b. $p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{2e-1}{2e}\right)^n \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2e-1}{2e}\right)^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \ln \left(\frac{2e-1}{2e}\right) \leq \ln 0,01 \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } [0 ; +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln \left(\frac{2e-1}{2e}\right)} \text{ (car } \ln \left(\frac{2e-1}{2e}\right) < 0)$$

$$\Leftrightarrow n \geq 22,65.$$

Le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geq 0,99$ est donc $n = 23$.

Exercice 3 : candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité (sur 5 points)

1. Pour tout nombre complexe z non nul,

$$\begin{aligned} \frac{z-4}{z} = i &\Leftrightarrow z-4 = iz \\ &\Leftrightarrow z(1-i) = 4 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4}{1-i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{z = 2 + 2i} \end{aligned}$$

2. Le discriminant de $z^2 - 2z + 4$ est $\Delta = 4 - 16 = -12$

L'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ admet deux racines complexes conjuguées qui sont :

$$z_1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 - i\sqrt{3}$$

Ecriture exponentielle de z_1 et z_2 :

$$|z_1| = 2 \text{ donc } z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$3. \text{ On a : } \frac{b-d}{0-d} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{-2+2i}{2+2i} = \frac{(-2+2i)(2-2i)}{8} = \frac{8i}{8} = i$$

$$\left| \frac{b-d}{0-d} \right| = \frac{DB}{DO} = |i| = 1 \text{ donc } DB = DO, \text{ le triangle ODB est isocèle en D}$$

$$\arg \left(\frac{b-d}{0-d} \right) = \widehat{(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DB})} = \arg i = \frac{\pi}{2} [2\pi], \text{ le triangle ODB est rectangle en D}$$

Le triangle ODB est donc rectangle isocèle en D.

$$4. \text{ On a : } f-0 = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et } a-e = 2 - 1 + i\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } f-0 = a-e$$

Donc $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{EA}$, OEAF est un parallélogramme.

$$\text{De plus } OF = |f| = 2 \text{ et } OE = |e| = 2$$

OEAF est donc un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur c'est donc un **losange**.

5.

a. E' est l'image par la rotation r du point E.

$$\text{Donc } e' = e \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = (1 - i\sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{2}} = (1 - i\sqrt{3})i \quad e' = \sqrt{3} + i$$

$$b. A'E' = |e' - a'| = |\sqrt{3} + i - 2i| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{4} = 2$$

Donc E' appartient au cercle de centre A' et de rayon 2 soit le cercle C' .

$$\begin{aligned}
 \text{c. } e - d &= 1 - i\sqrt{3} - 2 - 2i \\
 &= -1 - i(2 + \sqrt{3}). \\
 (\sqrt{3} + 2)(e' - d) &= (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + i - 2 - 2i) \\
 &= (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2 - i) \\
 &= 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4 - 2i \\
 &= -1 - i(2 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

Donc $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$
 $e - d$ est l'affixe du vecteur \overrightarrow{DE} , $e' - d$ celui du vecteur $\overrightarrow{D'E'}$.

On en déduit donc que $\overrightarrow{DE} = (\sqrt{3} + 2)\overrightarrow{D'E'}$.

Les vecteurs \overrightarrow{DE} et $\overrightarrow{D'E'}$ sont donc colinéaires, les points E, E' et D sont alignés.

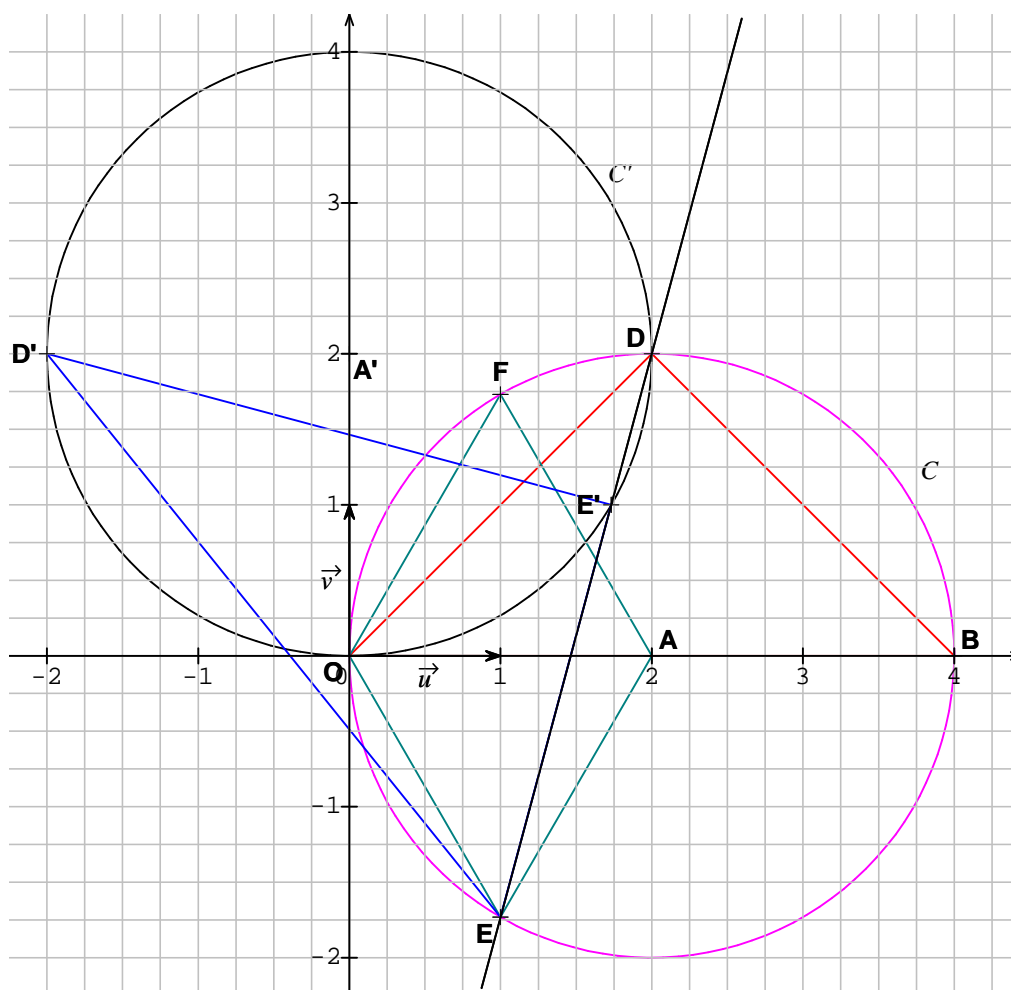
6. D' est l'image de D par la rotation r .

E' est l'image de E par la rotation r .

$$\text{Donc } \widehat{(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{D'E'})} = \frac{\pi}{2}$$

Les points E, E' et D étant alignés on en déduit que $\widehat{(\overrightarrow{E'E}, \overrightarrow{D'E'})} = \frac{\pi}{2}$.

Le triangle EE'D' est donc rectangle en E'.



Exercice 3 : candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (sur 5 points)**Partie A**

1. Soit k le rapport et α l'angle de la similitude s .

$$\left. \begin{array}{l} s(A) = I \\ s(B) = J \end{array} \right\} \text{IJ} = k \text{ AB} \text{ et } (\widehat{\text{AB}}, \widehat{\text{IJ}}) = \alpha$$

$$\text{donc } k = \frac{\text{IJ}}{\text{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\text{AB}}{\text{AB}} = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = (\widehat{\text{AB}}, \widehat{\text{IJ}}) = (\widehat{\text{AB}}, \widehat{\frac{1}{2}\text{AD}}) = \frac{\pi}{2}$$

Le rapport de s est $\frac{1}{2}$ et l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$

2. $s(A) = I$ donc $(\widehat{\Omega\text{A}}, \widehat{\Omega\text{I}}) = \frac{\pi}{2}$ donc Ω appartient au centre de diamètre $[\text{AI}]$ soit Γ_1 .

$s(B) = J$ donc $(\widehat{\Omega\text{B}}, \widehat{\Omega\text{J}}) = \frac{\pi}{2}$ donc Ω appartient au centre de diamètre $[\text{BJ}]$ soit Γ_2 .

Ω est donc l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 .

Pour placer Ω on choisit le point tel que $\Omega\text{I} = \frac{1}{2}\Omega\text{A}$ on vérifie également que $\Omega\text{J} = \frac{1}{2}\Omega\text{B}$.

3. $s(B) = J$, l'image de la droite (BC) par s est la droite passant par J et perpendiculaire à (BC) car l'angle de la similitude vaut $\frac{\pi}{2}$, **c'est donc la droite (DC) .**

- Image par s du point C :

Notons C' l'image de C par s .

$$s(B) = J \text{ et } s(C) = C' \text{ donc } \text{JC}' = \frac{1}{2} \text{BC}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} \text{BC} = \frac{1}{2} \text{DC} = \text{DJ} = \text{JC}$$

Comme (DC) est l'image de (BC) par s , C' appartient donc à la droite (DC) .

C' est donc le point D ou le point C .

C n'étant pas le centre de la similitude, C' est donc le point D

L'image de C par s est donc D .

- Image par s du point I :

$$s(I) = K \text{ et } s(C) = D$$

Le point K appartient à la droite passant par D et perpendiculaire à (CI) car l'angle de la similitude vaut $\frac{\pi}{2}$, c'est la droite (CI) (les diagonales d'un carré sont perpendiculaires)

$$\text{De plus } \text{KD} = \frac{1}{2} \text{IC} = \frac{1}{2} \text{ID}.$$

K est donc le milieu de $[\text{ID}]$.

4. On pose $h = s \circ s$.

- a. h est la composée de deux similitudes de point invariant Ω . (centre des similitudes).
Donc h laisse le point Ω invariant.

Or la composée de deux similitudes a pour rapport le produit des deux rapports soit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

et pour angle la somme des deux angles soit $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

h est donc une similitude (car c'est la composée de deux similitudes) de rapport $\frac{1}{4}$,
d'angle π et de centre Ω (point invariant)

- b. $h(A) = s \circ s(A)$
 $= s(I)$ car $s(A) = I$
 $= K$ car $s(I) = K$

Donc $h(A) = K$

Donc $(\widehat{\Omega A, \Omega K}) = \pi$

Les points A , Ω et K sont donc alignés.

Partie B

1. L'écriture complexe de la similitude s est $z' = az + b$

L'affixe de I est : $\frac{2+2i}{2} = 1+i$

L'affixe de J est : $\frac{2+2i+2i}{2} = 1+2i$

$s(A) = I$ donne $1+i = a \times 0 + b$ soit $b = 1+i$

$s(B) = J$ donne $1+2i = 2a + b$ soit $2a = i$ soit $a = \frac{1}{2}i$

L'écriture complexe de la similitude s est bien $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.

2. Notons ω l'affixe de Ω .

Ω est le centre de la similitude s donc son affixe vérifie : $\omega = \frac{1}{2}i\omega + 1 + i$

$$\omega = \frac{1}{2}i\omega + 1 + i \Leftrightarrow \omega \left(1 - \frac{1}{2}i\right) = 1 + i$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{1+i}{\frac{2-i}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{2+2i}{2-i}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{(2+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{2+6i}{5}$$

L'affixe du point Ω est $\omega = \frac{2+6i}{5}$

3. Notons e l'affixe de E .

$$s(E) = A \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}i \times e + 1 + i$$

$$\text{soit } \frac{1}{2}i e = -1 - i$$

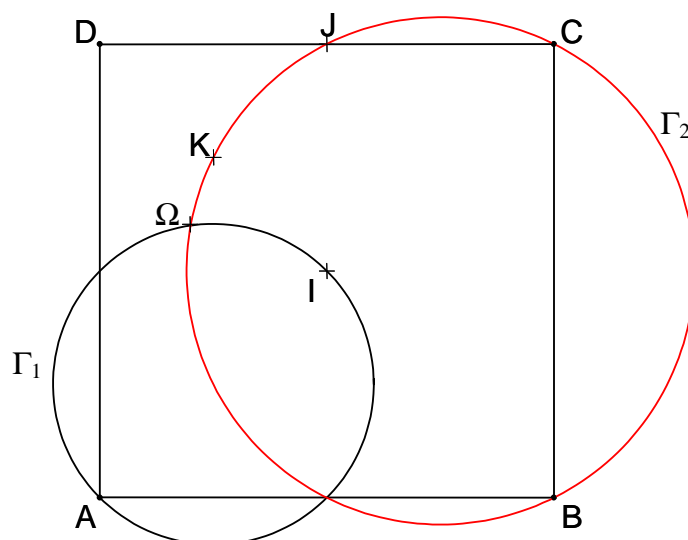
$$e = \frac{-2(1+i)}{i}$$

$$e = 2i(1+i)$$

$$e = -2 + 2i$$

L'affixe du point E tel que $s(E) = A$ est $-2 + 2i$

E_+



Exercice 4 : Sur 4 points.**Commun à tous les candidats**

1. La distance du point O au plan P est égale à : $d = \frac{|2 \times 0 + 3 \times 0 + 4 \times 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$

Affirmation **a. Fausse**Affirmation **b. Vraie**c. P a pour équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.Une autre équation de P est $x + \frac{3}{2}y + 2z - \frac{1}{2} = 0$ Le vecteur $\vec{n} \left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$ est un donc vecteur normal au plan P.Affirmation **c. Vraie**d. Un vecteur normal au plan Q est $\vec{n}'(-5, 2, 1)$.Les vecteur \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires donc les plan P et Q ne sont pas parallèles.Affirmation **d. Fausse.**2. $\vec{n}(2, 1, -1)$ vecteur normal au plan P.a. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 - 4 \times 1 - 2 \times -1 = 0$: les vecteurs \vec{u} et \vec{n} sont orthogonauxLa droite D est parallèle au plan P (puisque \vec{n} vecteur normal au plan)Affirmation **Vrai.**b. Les vecteurs \vec{u} et \vec{n} ne sont pas colinéaires donc la droite D n'est pas orthogonale au plan P.Affirmation **Fausse**

c. La droite D est parallèle au plan P, donc soit D est incluse dans P, soit D et P ne sont pas sécantes.

D passe par A. Vérifions si A appartient à P

 $2 \times 1 + 1 - 1 = 2 \neq 0$, donc A n'appartient pas à P et D n'est pas sécante avec P.Affirmation **Fausse**d. D par le point A(1, 1, 1) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1, -4, -2)$.Un système d'équations paramétriques de D est
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$
Affirmation **Vraie**

3.

a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.

Le point B(2 ; -2 ; 3) vérifie : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$ donc il appartient à l'ensemble E en plus du point A

Affirmation **Fausse**

b. L'ensemble E est une droite passant par A.

Les plans $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$ ont au moins deux points en commun, le point A et le point B(2 ; -2 ; 3).

Ces deux plans n'étant pas confondus leur intersection est donc une droite passant par A et B

Affirmation **Vraie**

c. Affirmation **Fausse**

d. \overrightarrow{AB} (1, -3, 2).

L'ensemble E est donc une droite de vecteur directeur \overrightarrow{u} (1, -3, 2).

Affirmation **Vraie**

4.

a. Affirmation **Fausse, c'est vrai** seulement dans le cas d'un tétraèdre régulier.

b. (AH) est orthogonal à (BC) donc (AH) appartient au plan P.

Affirmation **Vraie**

c.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0\end{aligned}$$

L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ est le plan contenant A et orthogonal à (BC) c'est donc le plan P

Affirmation **Vraie**

d. Affirmation **Fausse, c'est vrai** seulement dans le cas d'un tétraèdre régulier