Exercice 1 : **Sur 6 points** ***(commun à tous les candidats)***

1.

a) Signe de ln x sur $]0 , +\infty[$:

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Signe de $(1 - \ln x)$ sur $]0 , +\infty[$.

$1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = e$ car la fonction ln est croissante sur $]0 , +\infty[$.

$1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$

$\Leftrightarrow x > e$ car la fonction ln est croissante sur $]0 , +\infty[$.

$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$.

Tableau de signe pour le produit $(\ln x)(1 - \ln x)$

x	0		1		e		$+\infty$
ln x	‖	–	0	+		+	
1 – ln x	‖	+		+	0	–	
(ln x)(1 – ln x)	‖	–	0	+	0	–	

Sur $]0 , 1[\cup]e , +\infty[$ $(\ln x)(1 - \ln x)$ est négatif.
Sur $]1 , e[$ $(\ln x)(1 - \ln x)$ est positif.
$(\ln x)(1 - \ln x)$ est nul pour $x = 1$ et $x = e$.

b) Pour étudier la position relative des deux courbes C et C' sur $]0 , +\infty[$ il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

$$f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2$$
$$= (\ln x)(1 - \ln x)$$

En utilisant la question précédente :

Sur $]0 , 1[\cup]e , +\infty[$, $(\ln x)(1 - \ln x)$ est négatif donc C et au dessous de C'
Sur $]1 , e[$, $(\ln x)(1 - \ln x)$ est positif donc C est au dessus de C'
$(\ln x)(1 - \ln x)$ est nul pour $x = 1$ et $x = e$ donc C et C' se coupe en $x = 1$ et $x = e$.

2.

a) Soit h la fonction définie sur $]0 , +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Alors $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$

La fonction ln est dérivable sur $]0 , +\infty[$, la fonction « carré » est dérivable sur $]0 , +\infty[$.
Par composé et somme de fonctions dérivables, h est dérivable sur $]0 , +\infty[$.
Pour tout x de $]0 , +\infty[$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}$$
$$= \frac{1 - 2\ln x}{x}$$

Sur $]0 , +\infty[$, le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $1 - 2\ln x$ car x est positif.

Signe de $1 - 2\ln x$ sur $]0 , +\infty[$.

$1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$ car la fonction ln est croissante sur $]0 , +\infty[$.

$1 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{2}}$ car la fonction ln est croissante sur $]0 , +\infty[$.

$1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$

Donc sur $]0 , e^{\frac{1}{2}}[$ h est croissante , sur $]e^{\frac{1}{2}} , +\infty[$ h est décroissante.

h admet un maximum en $e^{\frac{1}{2}}$.

b) $M(x, f(x))$ et $N(x, g(x))$.
Donc $MN = \sqrt{(f(x) - g(x))^2}$.
On a prouvé que sur $]1 , e[$, $f(x) - g(x) > 0$
Donc sur $]1 , e[$ $MN = f(x) - g(x) = h(x)$.
Comme $e^{\frac{1}{2}} \in]1 , e[$, on en déduit que la distance MN est maximale pour $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$
c) L'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ est définie si $x > 0$ soit sur $]0 , +\infty[$.
Posons $X = \ln x$.
L'équation devient $X^2 - X - 1 = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$$

Soit 2 solutions : $X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \ln x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ soit $x_1 = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \ln x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ soit $x_2 = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

L'équation $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ admet pour solution $\{ e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} ; e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \}$

d) On a $MN = \sqrt{(f(x) - g(x))^2}$.
Sur $]0 , 1[\cup]e , +\infty[$, on a prouvé que $f(x) - g(x) < 0$

Donc sur $]0 , 1[\cup]e , +\infty[$, $MN = -(f(x) - g(x)) = -h(x)$ soit $MN = (\ln x)^2 - \ln x$.

$MN = 1 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x \in \{ e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} ; e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \}$

Sur $]0 , 1[\cup]e , +\infty[$, il existe deux réels $a = e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $b = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

3.

a) Calcul de $\int_1^e \ln x \, dx$:

Posons $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$

Par intégration par partie :

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$$
$$= e \ln e - 1 \times \ln 1 - \int_1^e 1.dx$$
$$= e - [x]_1^e$$
$$= e - e + 1$$
$$\mathbf{= 1}$$

b) G est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme et produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $G'(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + x\left[\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right]$

$$= (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2$$
$$= (\ln x)^2$$
$$= g(x).$$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

c) On considère la partie du plan délimitée par les courbes C, C' et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Sur $]1, e[$ C est au dessus de C' donc $\mathcal{A} = \int_1^e (f(x) - g(x))dx$

$$\mathcal{A} = \int_1^e (f(x) - g(x))dx$$
$$= \int_1^e f(x)dx - \int_1^e g(x)dx$$
$$= \int_1^e \ln x dx - [G(x)]_1^e$$
$$= 1 - G(e) + G(1)$$

$G(e) = e[(\ln e)^2 - 2\ln e + 2]$
$= e$

$G(1) = 1[(\ln 1)^2 - 2\ln 1 + 2]$
$= 2.$

Donc $\mathcal{A} = 1 - e + 2$ soit $\boldsymbol{\mathcal{A} = 3 - e}$ (UA)

<u>Exercice 2 :</u> Sur 5 points (*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

1. Proposition 1 : FAUX

$\overrightarrow{u}\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$ est un vecteur directeur de (d).

$\overrightarrow{j}(0, 1, 0)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas colinéaires, donc la droite (d) n'est pas parallèle à l'axe $(O ; \overrightarrow{j})$.

2. Proposition 2 : VRAI

Soit P le plan orthogonal à (d) passant par A.

$\overrightarrow{u}\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$ est un vecteur directeur de (d) est aussi un vecteur normal au plan P.

Une équation du plan P est donc : $-\frac{1}{2}x + 0 \times y - \frac{3}{2}z + d = 0$ soit $x + 3z - 2d = 0$ (on $\times -2$)

$A \in (P)$ donc : $2 + 3 \times 1 - 2d = 0$ soit $d = \frac{5}{2}$.

Une équation de P est $x + 3z - 5 = 0$

3. Proposition 3 : FAUX

$A(2, -1, 1)$ et $B(4, -2, 2)$

C est le point de (d) d'abscisse 1 donc $1 = 2 - \frac{t}{2}$ soit $t = 2$.

On en déduis les coordonnées de C (1 , 1 , 2).

Appliquons le théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC :

On $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Soit $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$

$AB^2 = (4-2)^2 + (-2+1)^2 + (2-1)^2 = 6$ $AB = \sqrt{6}$
$AC^2 = (1-2)^2 + (1+1)^2 + (2-1)^2 = 6$ $AC = \sqrt{6}$
$BC^2 = (1-4)^2 + (1+2)^2 + (2-2)^2 = 18$

Donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{6+6-18}{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\dfrac{6}{2 \times 6} = -\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

La mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$ **radians**.

<u>Autre résolution</u> : en utilisant le produit scalaire

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ $\overrightarrow{AB}(2, -1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 2, 1)$

$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{2 \times -1 - 1 \times 2 + 1 \times 1}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$

$\cos(\widehat{ABC}) = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

4. Proposition 4 : VRAI

G est le barycentre des points pondérés (A ; – 1), (B ; 1) et (C ; 1) donc ses coordonnées sont :

$$x_G = \frac{-1\times 2 + 1\times 4 + 1\times 1}{-1+1+1} = 3 \text{ , de même } y_G = 0 \text{ ; } z_g = 3 \quad \text{Soit G } (3 , 0 , 3)$$

A(2 , –1 , 1) B(4 , – 2 , 2) C (1 , 1 , 2).

Coordonnées du milieu de [AG] : $\left(\frac{5}{2} , -\frac{1}{2} , 2\right)$;Coordonnées du milieu de [BC] : $\left(\frac{5}{2} , -\frac{1}{2} , 2\right)$

Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu.

5. Proposition 5 : VRAI

BC = $\sqrt{18}$ (voir question **3.**)

Le rayon de la sphère de centre C et passant par B est donc $\sqrt{18}$.

Calculons la distance de point C au plan P d'équation x + 3z – 5 = 0.

$$d(C,P) = \frac{\left|1\times 1 + 3\times 2 - 5\right|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

On a $\frac{\sqrt{10}}{5} < \sqrt{18}$, donc **la sphère coupe le plan P.**

Exercice 2 : **Sur 5 points (*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)**

1. Vrai .

La similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ i, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe $z' = 2\,e^{i\pi/2}\left(z-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

$$z' = 2\,(0+i)\left(z-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

$$z' = 2iz-\frac{2}{5}i+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

$$z' = 2iz + 1.$$

La transformation du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' définie par : $z' = 2iz + 1$ est bien la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ i, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

2. Faux

Soit S la surface d'équation $z = x^2 + 2x + y^2 + 1$.

Cherchons son intersection avec le plan d'équation z = 5.

$$5 = x^2 + 2x + y^2 + 1.$$

$$5 = (x + 1)^2 - 1 + y^2 + 1$$

$$5 = (x + 1) + y^2$$

$$\sqrt{5}^2 = (x + 1)^2 + y^2.$$

Il s'agit dans le plan z = 5, de l'équation d'un cercle de centre (– 1 , 0, 5) et de rayon $\sqrt{5}$.

3. Vrai

$750 = 5^3 \times 6$

$5^{750} = \left(5^{5^3}\right)^6 = \left(5^{5^3}\right)^{7-1}$

Appliquons le petit théorème de Fermat.

Si p est un entier premier et a un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

5^{5^3} est non divisible par 7 car $5^{5^3} = 5 \times 5 \times \ldots$.

Donc $\left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1$ est divisible par 7.

$5^{750} - 1$ est divisible par 7.

4. Vrai

Cherchons le PGCD de (3n + 4) et (4n + 3)

PGCD (4n + 3 , 3n + 4) = PGCD (4n + 3 – 3n – 4,3n + 4) (réduction du PGCD)
= PGCD (n – 1 , 3n + 4)
= PGCD (3n + 4 , n – 1)
= PGCD (3n + 4 – 3(n – 1) , n – 1)
= PGCD (7 , n – 1)

Or n est congru à 1 modulo 7 donc n – 1 congru à 0 modulo 7, on en déduit que :
PGCD (4n + 3 , 3n + 4) = 7.

5. Faux

D'après la propriété sur les combinaisons linéaires, l'ensemble des entiers au + bv (u et v entiers relatifs) est l'ensemble des multiples du PGCD (a, b).
Donc si au + bv = 2 alors 2 est un multiple du PGCD (a , b).
PGCD (a , b) peut donc être 1 ou 2.

Contre exemple :
a = 2 et b = 3 PGCD (a , b) = 1 Soient u = – 2 et v = 2
On a au + bv = 2 × – 2 + 3 × 2 = – 4 + 6 = 2 ≠ PGCD (a , b).

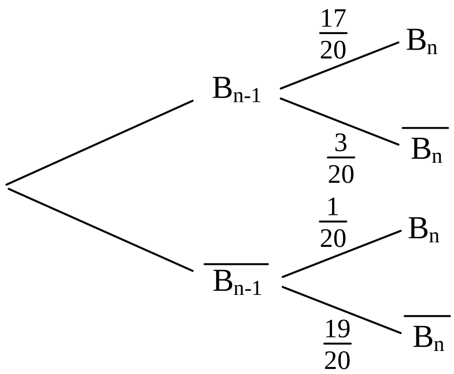
<u>Exercice 3 :</u> Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

On a : A_n : « Le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n »
$P(A_n) = p_n$ et $p_1 = 1$
Posons B_n : « La boule tirée à l'étape n est blanche »

1. $p_2 = P(A_2) = P(B_1)$
Or à l'étape 1 , on tire une boule dans l'urne U_1, et il y a 17 boules blanches sur un total de 20 boules dans cette urne, donc : $P(B_1) = \frac{17}{20}$, d'où :

$\mathbf{p_2 = \frac{17}{20} = 0,85}$

2.



<u>Pour n = 1</u> : $0,8p_1 + 0,05 = 0,8 \times 1 + 0,05 = 0,85$, donc $\mathbf{p_2 = 0,8\, p_1 + 0,05}$
<u>Pour n ≥ 2</u> : $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(B_n)$
Or B_{n-1} et $\overline{B_{n-1}}$ forment une partition de l'univers des tirages à l'étape n-1, donc d'après la loi des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(B_n \cap B_{n-1}) + P(B_n \cap \overline{B_{n-1}})$

$p_{n+1} = P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(B_n) + P(\overline{B_{n-1}})P_{\overline{B_{n-1}}}(B_n)$

Or $P(B_{n-1}) = P(A_n) = p_n$, d'où $P(\overline{B_{n-1}}) = 1 - p_n$
De plus , d'après l'énoncé, $P_{B_{n-1}}(B_n)$ est égale à la probabilité de prendre une boule blanche dans l'urne U_1 c'est à dire $\frac{17}{20}$, et $P_{\overline{B_{n-1}}}(B_n)$ est égale à la probabilité de prendre une boule blanche dans l'urne U_2. C'est à dire $\frac{1}{20}$

$p_{n+1} = \frac{17}{20} p_n + \frac{1}{20}(1 - p_n)$

$\mathbf{p_{n+1} = \frac{16}{20} p_n + \frac{1}{20}}$

Donc **pour tout n entier naturel non nul :** $\mathbf{p_{n+1} = 0,8\, p_n + 0,05}$

3. $p_3 = 0,8\, p_2 + 0,05$
$p_3 = 0,8 \times \frac{17}{20} + 0,05$
$\mathbf{p_3 = 0,73}$

4. **a)** Montrons par récurrence la propriété : « $p_n > 0,25$ » pour n entier naturel non nul.

Pour n = 1 :

$P_1 = 1$ donc $p_1 > 0,25$

Supposons : $p_k > 0,25$ pour un rang k fixé.

On a alors : $0,8\, p_k > 0,2$

$0,8\, p_k + 0,05 > 0,25$

Or $p_{k+1} = 0,8\, p_k + 0,05$, donc :

$\mathbf{p_{k+1} > 0,25}$

D'après le principe de récurrence, la propriété étant vraie au rang 1 et étant héréditaire, elle est donc vraie pour tout n tel que $n \geq 1$

Donc **$p_n > 0,25$ pour tout entier naturel n non nul**

b) pour tout entier naturel n non nul

$p_{n+1} - p_n = 0,8\, p_n + 0,05 - p_n$ pour tout entier naturel n non nul

$p_{n+1} - p_n = -0,2\, p_n + 0,05$

Or $p_n > 0,25$, donc :

$-0,2\, p_n < -0,05$

$-0,2\, p_n + 0,05 < 0$

$p_{n+1} - p_n < 0$ pour tout n non nul.

La suite (p_n) est donc décroissante

c) (p_n) est décroissante et minorée par 0,25, donc elle est **convergente**. Soit ℓ sa limite.

d) $p_{n+1} = 0,8\, p_n + 0,05$

donc $\lim p_{n+1} = \lim (0,8\, p_n + 0,05)$

$\lim p_{n+1} = 0,8 \lim p_n + 0,05$

$\boldsymbol{\ell = 0,8\, \ell + 0,05}$

(On peut aussi utiliser le théorème du point fixe :

(p_n) est convergente de limite ℓ et est de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$ avec f fonction continue telle que : $f(x) = 0,8x + 0,05$

D'où : la limite de p_n vérifie : $f(\ell) = \ell$ c'est à dire $\ell = 0,8\, \ell + 0,05$)

On résout :

$\ell\,(\ell - 0,8) = 0,05$

ℓ **= 0,25**

Exercice 4 : **Sur 5 points** ***(commun à tous les candidats)***

1. $z' = \dfrac{z}{|z|}\left(2 - |z|\right).$

$= \dfrac{re^{i\alpha}}{r}(2 - r)$ car $|z| = r$

Donc **$z' = (2 - r)e^{i\alpha}$.**

2. $a' = \dfrac{3}{|3|}(2 - |3|)$

$= \dfrac{3}{3}(2 - 3)$

$a' = -1$

3.

a) $b = -\sqrt{3} + i.$

$|b| = \sqrt{3+1} = 2$ soit $b = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$

$b = 2\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) Le module de b est 2 et un argument de b est $\dfrac{5\pi}{6}$

Donc **$b' = $** $(2 - 2)\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **$= 0$**

4. Voir figure

5.

a) Pour tout point M du plan privé de O,

$f(M) = O$ et $M \neq O$ $\Leftrightarrow \dfrac{z}{|z|}\left(2 - |z|\right) = 0$ et $z \neq 0$

$\Leftrightarrow |z| = 2$ car $z \neq 0$ (privé de O)

L'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par *f* est O est donc le cercle de centre O et de rayon 2.

b) Voir figure.

6. Pour tout point M du plan privé de O,

$$f(\text{M}) = \text{M} \text{ et } \text{M} \neq \text{O} \iff \frac{z}{|z|}\left(2-|z|\right) = z \text{ et } z \neq 0$$

$$\iff 2-|z| = z \times \frac{|z|}{z} \text{ et } z \neq 0$$

$$\iff 2-|z| = |z| \text{ et } z \neq 0$$

$$\iff |z| = 1 \text{ et } z \neq 0$$

L'ensemble des points M du plan privé du point O tels que *f* '(M) = M est le cercle de centre O et de rayon 1 soit le cercle C_1.

7.

a) L'affixe de I est :

$$z_I = \frac{z + z'}{2}$$

$$= \frac{r\,e^{i\,\alpha} + (2-r)\,e^{i\,\alpha}}{2}$$

$$\mathbf{z_I = e^{i\,\alpha}}$$

Donc $|z_I| = 1$.

Le point I est donc sur le cercle C_1.

Montrer que I appartient à C_1.

b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est $r\,e^{i\,\alpha}$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OI}$ est $z_I = \mathbf{e^{i\,\alpha}}$ **.**

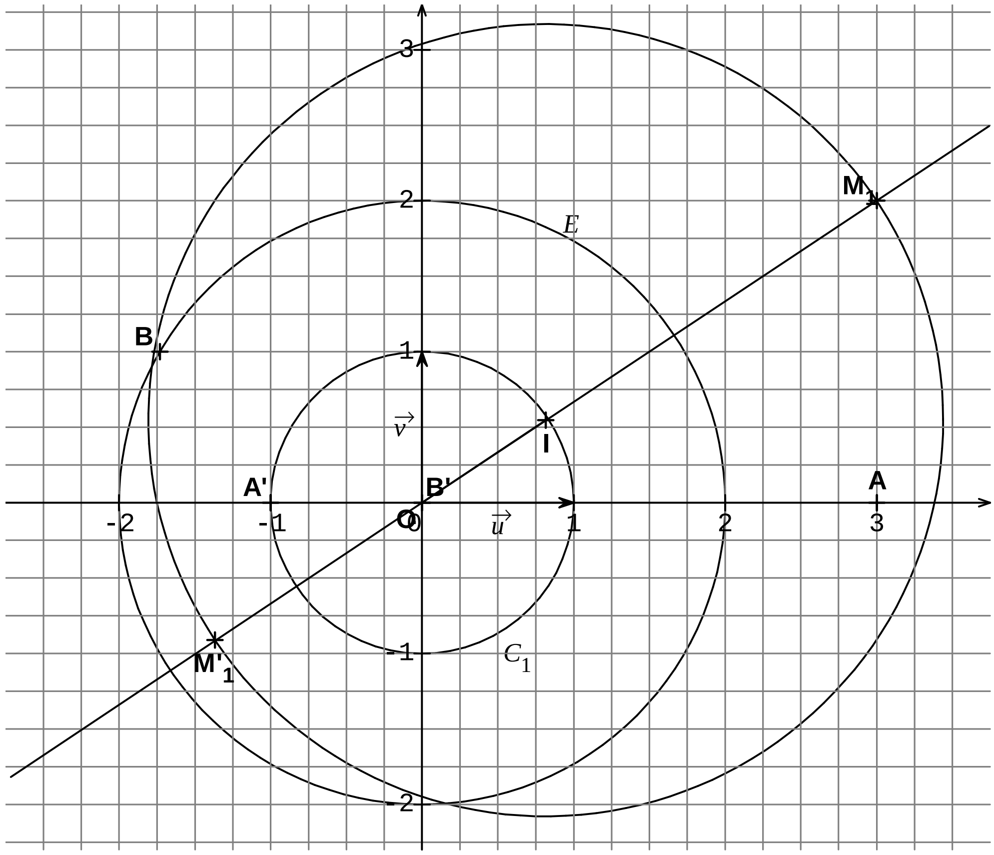
Donc $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$., Les points O, I et M sont donc alignés et comme $\frac{1}{r}$ est positif le point

I appartient à la demi-droite [OM).

c) Pour construire M_1' :

Traçons la demi droite [OM]. Elle coupe le cercle en un point I qui est le milieu de $[M_1M_1']$.

A l'aide d'un compas reportons la distance IM_1 à partir de I sur la demi droite [IO), on obtient alors le point M_1.


3
2
1
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
M1
E
B
v
I
A'
B'
A
O
u
M'1
C1