<u>Exercice 1 :</u> Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

1. Posons $z = x + iy$

$$2z + \overline{z} = 9 + i \Leftrightarrow 2(x + iy) + x - iy = 9 + i$$
$$\Leftrightarrow 3x - 9 + i(y - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x - 9 = 0 \text{ et } y - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ et } y = 1.$$

Une solution de l'équation $2z + \overline{z} = 9 + i$ est : $z = 3 + i$ **Réponse c)**

2. Soit z un nombre complexe ; Posons $z = x + iy$

$$|z + i| = |x + i(y + 1)| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

De plus :

$$|z| + 1 = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

$$|z - 1| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

$$\left|i\overline{z} + 1\right| = |i(x - iy) + 1| = |y + 1 + ix| = \sqrt{(y + 1)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1}$$

Donc : $|z + i|$ est égal à : $\left|i\overline{z} + 1\right|$ **Réponse c)**

3. Soit $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$

on a $|z_1| = 2$ $z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\arg(z_1) = \frac{2\pi}{3}$

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ donc $\overline{z}$ à pour argument $-\theta$.

Un argument de $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est : $\frac{2\pi}{3} - (-\theta) = \frac{2\pi}{3} + \theta$ **Réponse b)**

4. Soit n un entier naturel.

On a $\left|\sqrt{3} + i\right| = 2$ donc $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Donc $\left(\sqrt{3} + i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

Le complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

$$2^n \cos\frac{n\pi}{6} = 0$$

$$\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \ \left(2^n \neq 0 \text{ et } \cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$$

$$\frac{n}{6} = \frac{1}{2} + k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$n = 3 + 6k \ (k \in \mathbb{Z})$$

Réponse b)

5. Soient A et B deux points d'affixe respective i et −1.

$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$

$\Leftrightarrow MA = MB$

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est la médiatrice du segment [AB].

On vérifie que le point O appartient à cet ensemble en effet $|0 - i| = 1$ et $|0 + 1| = 1$.

Donc l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

Réponse c)

6. Soit Ω le point d'affixe $1 - i$.
Posons $z = x + iy$

$|z - 1 + i| = |3 - 4i| \Leftrightarrow |z - 1 + i| = 5$

$\Leftrightarrow z - 1 + i = 5e^{i\theta}$ avec θ réel (θ est l'argument de $z - 1 + i$).

$\Leftrightarrow z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel

L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :
$z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel **Réponse c)**
Rq : Il s'agit du cercle de centre Ω et de rayon 5.

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et 3i.

Soit le point C d'affixe z_C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

ABC est rectangle isocèle en A. Donc C est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donc $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$ Soit $z_C = i(3i - 4) + 4 = 1 - 4i$

L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est : $1 - 4i$

Réponse a)

8. $\frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow \frac{z-2}{z-1} = \frac{z(z-1)}{z-1}$

$\Leftrightarrow z - 2 = z^2 - z \quad (z \neq 1)$

$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad \Delta = 4 - 8 = -4 \qquad (z \neq 1)$

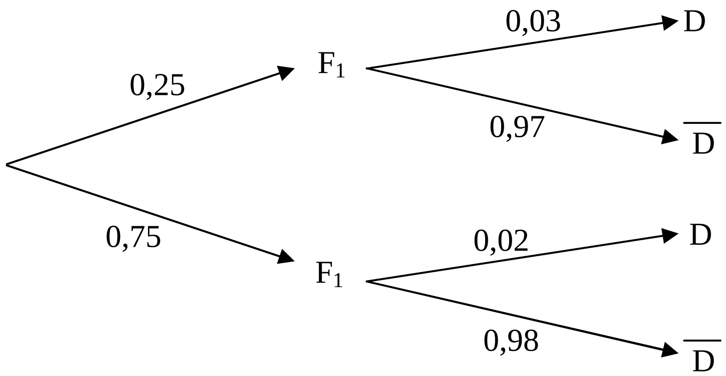
$\Leftrightarrow z = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$ ou $z = \frac{2-2i}{2} = 1 - i \qquad (z \neq 1)$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est : $\{1 - i ; 1 + i\}$

Réponse c)

<u>Exercice 2 :</u> Sur 5 points *(commun à tous les candidats)*

1. a) Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second
Donc : $p(F_1) = 0,25$ et $p(F_2) = 0,75$.
La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur donc $p_{F1}(D) = 0,03$ et de 2 % chez le second donc $p_{F2}(D) = 0,02$.



b) $p(D \cap F_1)$ $= P_{F1}(D) \times P(F_1) = 0,03 \times 0,25$ **$= 7,5.10^{-3}$**
F_1 et F_2 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :
$p(D) = p(D \cap F_1) + p(D \cap F_2)$
$= 0,03 \times 0,25 + 0,02 \times 0,75 = 7,5 \times 10^{-3} + 0,75 \times 0,02 = 0,0225$
p(D) = 0,0225

c) On veut calculer $p_D(F_1)$

$$p_D(F_1) = \frac{p(D \cap F_1)}{p(D)} = \frac{7,5.10^{-3}}{0,0225} \qquad \text{soit } \mathbf{p_D(F_1) = \frac{1}{3}}$$

Sachant qu'un composant est défectueux, la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur est égale à $\frac{1}{3}$.

2. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de composants défectueux.
Y suit une loi binomiale de paramètres n = 20 et p = p(D) = 0,0225.
Pour k composants défectueux on a : $p(Y = k) = \binom{20}{k}(0,0225)^k(1 - 0,0225)^{20-k}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } p(Y \geq 2) &= 1 - p(Y < 2) \\ &= 1 - [p(Y = 0) + p(Y = 1)] \\ &= 1 - \binom{20}{0}(0,0225)^0(0,9775)^{20} - \binom{20}{1}(0,0225)^1(0,9775)^{19} \\ &= 1 - (0,9775)^{20} - 20 \times (0,0225) \times (0,9775)^{19} \\ &= 0,074 \text{ à } 10^{-3} \text{ près} \end{aligned}$$

Le responsable commande 20 composants. La probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux est égale à 0,074.

3. a) Comme X suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout k réel positif, $P(X \leq k) = \int_0^k \lambda e^{-\lambda x} dx$

Comme $p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5)$

On a donc $p(X > 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^5 = 1 - [-e^{-5\lambda} + 1] = e^{-5\lambda}$

Donc $e^{-5\lambda} = 0{,}325$ Soit $-5\lambda = \ln 0{,}325$

$$\boldsymbol{\lambda = -\frac{\ln 0{,}325}{5}} \approx 0{,}225 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

b) $P(X \leq 8) = \int_0^8 \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-8\lambda} + 1 = 0{,}835$ à 10^{-3} près

$p(X > 8) = 1 - p(X \leq 8) = e^{-8\lambda} = 0{,}165$ à 10^{-3} près

La probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans est égale à 0,835 ; plus de 8 ans est égale à 0,165.

c) On veut calculer $p_{X > 3}(X > 8) = \dfrac{p((X > 3) \cap (X > 8))}{p(X > 3)}$

L'événement $(X > 3) \cap (X > 8)$ est égale à $(X > 8)$.

Or $p(X > 8) = e^{-8\lambda}$ De même $p(X > 3) = e^{-3\lambda}$

Donc $p_{(X > 3)}(X > 8) = \dfrac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-5\lambda} = p(X > 5) = 0{,}325$ à 10^{-3} près

La probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans est égale à 0,325.

<u>Exercice 3 :</u> Sur 6 points *(commun à tous les candidats)*

Partie A : Question de cours

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a\,;+\infty[$.
On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si … **pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ et pour tout x de $]a\,;+\infty[$, il existe un réel x_1 tel que, pour tout $x > x_1$, $f(x) \in$ I.**

2. Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $[a\,;+\infty[$ telles que :
Pour tout x de $]a\,;+\infty[$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$,
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ donc il existe un réel x_1 tel que, pour tout $x > x_1$, $g(x) \in$ I.
$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ donc il existe un réel x_2 tel que, pour tout $x > x_2$, $h(x) \in$ I.
Soit X le plus grand des réels x_1 et x_2
Donc pour tout $x \geq X$ on a $g(x) \in$ I et $h(x) \in$ I
Comme $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ alors $f(x) \in$ I..
On a donc démontré que pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel X tel que, pour tout réel $x > X$, on a $f(x) \in$ I. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell}$.

Partie B

1. Soit a un nombre réel.
Une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a a pour équation :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$
On a : $f'(a) = e^a - 1$ et $f(a) = e^a - a - 1$
Donc une équation de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse a a pour équation :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$= (e^a - 1)(x - a) + e^a - a - 1$$
$$= (e^a - 1)x - ae^a + a + e^a - a - 1$$
$$\mathbf{y = (e^a - 1)x - ae^a + e^a - 1}$$

2. Cette tangente (T) coupe la droite (D) au point N d'abscisse b. donc on a :
$$(e^a - 1)b - ae^a + e^a - 1 = -b - 1$$
Soit $be^a - ae^a + e^a = 0$
Soit $e^a(b - a + 1) = 0$
Soit $\mathbf{b - a = -1}$ ou $e^a = 0$ (impossible)

3. Construction de la tangente (T) à (C) au point M d'abscisse 1,5 :
Donc a = 1,5 soit b = 0,5.
La tangente (T) passe par le point M de (C) d'abscisse 1,5 et le point N d'abscisse 0,5 de (D).
La tangente (T) est la droite (MN).
Donc pour tracer (T) il faut placer les points M et N et les relier.
Voir graphe en fin d'exercice.

Partie C

1. La courbe (C) passe par le point (0 ; 0) et est situé au dessus de l'axe des abscisses donc **pour tout x de $\mathbb{R}$, *f* est positive ou nulle**.

2. pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ donc $e^x - x - 1 \geq 0$

Soit $e^x \geq x + 1$.

On a donc pour tout entier naturel non nul n ;

Pour $\mathbf{x = \frac{1}{n}}$ **; (1)** $\mathbf{e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}}$ **et pour** $\mathbf{x = -\frac{1}{n+1}}$ **; (2)** $\mathbf{e^{\frac{-1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}}$

3. Pour tout entier naturel non nul n ;

$e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ car la fonction puissance *n*-ième est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}\times n} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Donc **pour tout entier naturel non nul n :** $\mathbf{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e}$

4. Pour tout entier naturel non nul n :

$e^{\frac{-1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{-1}{n+1}}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ car la fonction puissance *n*-ième est croissante sur $[0;+\infty[$

$$\Leftrightarrow e^{-1} \geq \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow e \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$\Leftrightarrow e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

Donc **pour tout entier naturel non nul n :** $\mathbf{e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}$

5. On a pour tout entier naturel non nul n : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$ et $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Donc pour tout entier naturel non nul n : $\boldsymbol{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow 0 \leq e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$$

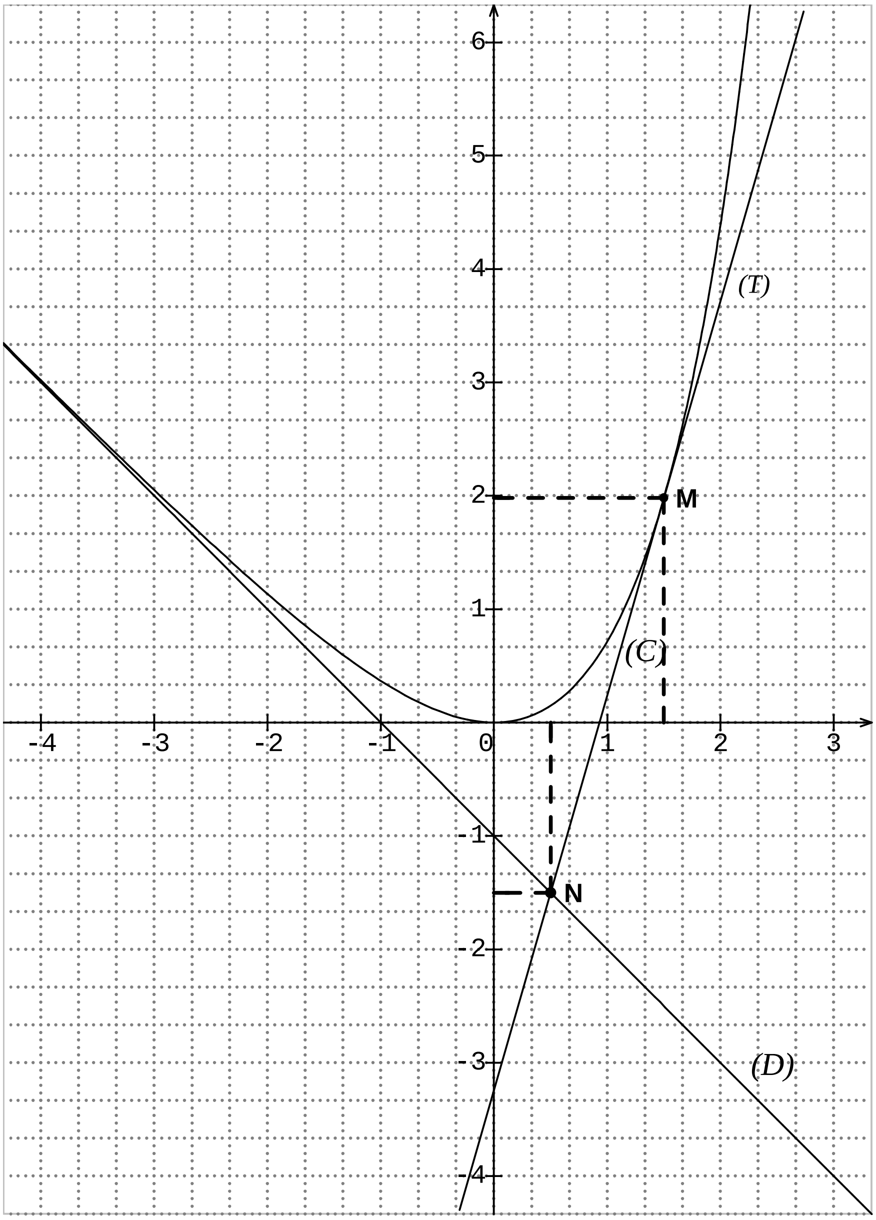
$$\Leftrightarrow 0 \leq e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e\times\frac{1}{n} \quad \text{car } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

$$\Leftrightarrow -e \leq -\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e\times\frac{1}{n}-e$$

$$\Leftrightarrow e-\frac{e}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(e-\frac{e}{n}\right) = e$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e = e$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$



6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
(T)
M
(C)
N
(D)

<u>Exercice 4 :</u> Sur 5 points (*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

1.a) H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) donc la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) donc la droite (OH) est orthogonale à toute droite du plan (ABC).
Donc **la droite (OH) est orthogonale à la droite (BC).**

Montrons que la droite (OA) est orthogonale à la droite (BC) :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})$$
$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$$

Les triangles OAB et OCA sont rectangles en O donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BO} = 0$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 0$.
Par conséquent $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = 0$
Donc la droite (OA) est orthogonale à la droite (BC).

b) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}$
La droite (OH) est orthogonale à la droite (BC) donc $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} = 0$
De plus $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = 0$ (démontré ci-dessus)
Donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$
Donc les droites (AH) et (BC) sont orthogonales.

On admet de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales

c) Les droites (AH) et (BC) sont orthogonales donc la droite (AH) est une hauteur du triangle ABC
Les droites (BH) et (AC) sont orthogonales donc la droite (BH) est une hauteur du triangle ABC
H est le point d'intersection de ces deux hauteurs donc **H est l'orthocentre du triangle ABC.**

2. a) Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a , b , c et d des réels.
$A \in$ (ABC) donc : $a + d = 0$ soit $a = -d$
$B \in$ (ABC) donc : $2b + d = 0$ soit $b = -\dfrac{d}{2}$
$C \in$ (ABC) donc : $3c + d = 0$ soit $c = -\dfrac{d}{3}$

Pour $d = -6$ on a $\begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

b) Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ donc un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

La **droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC) donc de vecteur directeur $\vec{n}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$**

c) Une équation cartésienne du plan (ABC) est : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

Une représentation paramétrique de la droite D est : $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H dont les coordonnées sont solutions du système : $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ 36t + 9t + 4t - 6 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \\ t = \dfrac{6}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{36}{49} \\ y = \dfrac{18}{49} \\ z = \dfrac{12}{49} \\ t = \dfrac{6}{49} \end{cases}$$

Donc le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\boldsymbol{\left(\dfrac{36}{49}, \dfrac{18}{49}, \dfrac{12}{49}\right)}$

3. a) La distance d'un point I $(x_I ; y_I ; z_I)$ au plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est égale à : $\dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Donc la distance du point O au plan (ABC) est **OH** $= \dfrac{|6 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \boldsymbol{\dfrac{6}{7}}$

b) Volume V du tétraèdre OABC :
(OB) est la hauteur associée à la base OCA d'aire A(OCA).

On a : $A(OCA) = \dfrac{OA \times OC}{2}$ (OCA est rectangle en O).

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times OB \times A(OCA) = \dfrac{1}{3} \times OB \times \dfrac{OA \times OC}{2}$ avec OA = 1 ; OB = 2 et OC = 3

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times 2 \times \dfrac{3}{2}$

Donc **V = 1**

(OH) est orthogonale au plan (ABC) donc (OH) est la hauteur associée à la base ABC.

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times OH \times A(ABC)$

Donc $A(ABC) = \dfrac{3V}{OH} = \dfrac{3 \times 1}{\frac{6}{7}}$

Donc A(ABC) = $\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

c) On a $A(ABC)^2 = \frac{49}{4}$

Calculons le carré des aires des autres faces du tétraèdre.
OA = 1 ; OB = 2 et OC = 3

$A(OCA) = \frac{OA \times OC}{2} = \frac{3}{2}$

$A(OBA) = \frac{OA \times OB}{2} = 1$

$A(OBC) = \frac{OB \times OC}{2} = 3$

Donc $A(OCA)^2 + A(OBA)^2 + A(OBC)^2 = \frac{9}{4} + 1 + 9 = \frac{49}{4}$.

Donc $A(ABC)^2 = A(OCA)^2 + A(OBA)^2 + A(OBC)^2$

On a vérifié que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 4 : **Sur 5 points (*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)**

1. a) On a : $6^2 = 36 = 3 \times 11 + 3$ donc $6^2 \equiv 3$ [11]
Or si $a \equiv b$ mod 11, alors pour tout entier naturel n on a : $a^n \equiv b^n$ mod 11.

Donc $(6^2)^5 \equiv 3^5$ [11] soit $6^{10} \equiv 243$ [11] soit $6^{10} \equiv 1$ [11] $(243 = 22 \times 11 + 1)$

Le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 est 1.

b) $6 = 1 \times 5 + 1$ donc $6 \equiv 1$ [5]
Donc $6^4 \equiv 1^4$ [5] soit $6^4 \equiv 1$ [5]

Le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 est 1.

c) $6^{10} \equiv 1$ [11] donc $(6^{10})^4 \equiv 1^4$ [11] soit $\mathbf{6^{40} \equiv 1}$ **[11]**
$6^4 \equiv 1$ [5] donc $(6^4)^{10} \equiv 1^{10}$ [5] soit $\mathbf{6^{40} \equiv 1}$ **[5]**

d) $6^{40} \equiv 1$ [11] donc 11 divise $6^{40} - 1$.
$6^{40} \equiv 1$ [5] donc 5 divise $6^{40} - 1$.
Comme 5 et 11 sont premiers entre eux, alors 11×5 divise $6^{40} - 1$.
Donc $6^{40} - 1$ est bien divisible par 55.

2. x et y désignent des entiers relatifs.

a) 5 divise 65 et 40 donc 5 divise $65x - 40y$.
5 ne divise pas 1.
Donc l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.

b) Montrons que 17 et 40 sont premiers entre eux, pour cela déterminons le PGCD de 17 et 40 à l'aide de l'algorithme d'euclide.
$40 = 17 \times 2 + 6$
$17 = 6 \times 2 + 5$
$6 = 5 \times 1 + 1$
$5 = 5 \times 1 + 0$
Le dernier reste non nul est 1 donc PGCD (40 ; 17) = 1.
Donc 17 et 40 sont premiers entre eux.

Donc d'après le Théorème de Bézout il existe un couple (u , v) d'entiers relatifs tels que
$17u + 40v = 1$.

On en déduit que l'équation (E′) $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.

c) Déterminons à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E′) $17x - 40y = 1$

$40 = 17 \times 2 + 6$ donc $6 = 40 - 17 \times 2$ (1)
$17 = 6 \times 2 + 5$ donc $5 = 17 - 6 \times 2$ (2)
$6 = 5 \times 1 + 1$ donc $1 = 6 - 5 \times 1$ (3)

Reportons (2) dans (3) :
$1 = 6 - (17 - 6 \times 2) = 6 - 17 + 6 \times 2 = 6 \times 3 - 17$
Reportons (1) :
$1 = 6 \times 3 - 17 = (40 - 17 \times 2) \times 3 - 17 = 40 \times 3 - 17 \times 6 - 17 = 40 \times 3 - 17 \times 7$

On a donc $1 = 40 \times 3 - 17 \times 7 = -40 \times (-3) + 17 \times (-7)$

Le couple (– 7 ; – 3) est solution de (E')

d) Résolution de l'équation (E′) :
$17x - 40y = 1 \Leftrightarrow 17x - 40y = 17 \times (-7) - 40 \times (-3)$
$\Leftrightarrow 17(x + 7) = -40(-3 - y)$
$\Leftrightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$
Donc 17 divise $40(y + 3)$
Comme 17 et 40 sont premiers entre eux, on a donc d'après le théorème de Gauss 17 qui divise $y + 3$, donc il existe un entier relatif k tel que $y + 3 = 17k$ soit $y = 17k - 3$.
Donc $x + 7 = 40k$ soit $x = 40k - 7$.

Les solutions de (E') sont les couples (40k – 7 ; 17k – 3) avec k entier relatif.

Notons $(x_0 ; y_0)$ une solution de (E').
On a donc $17x_0 = 40y_0 + 1$.
y_0 est un entier relatif donc $17x_0 \equiv 1\ [40]$ avec $x_0 = 40k - 7$.
Si x_0 est un entier naturel inférieur à 40 alors on a : $0 \leq 40k - 7 \leq 40$ soit $\frac{7}{40} \leq k \leq \frac{47}{40}$
Donc $k = 1$ soit $x_0 = 33$.

Il existe donc un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1\ [40]$.

3. Soient a et b deux entiers naturel tels que $a^{17} \equiv b\ [55]$ et si $a^{40} \equiv 1\ [55]$
$a^{17} \equiv b\ [55]$ donc $(a^{17})^{33} \equiv b^{33}\ [55]$.
D'après la question **2.** $17 \times 33 \equiv 1\ [40]$ soit $17 \times 33 = 40k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Donc $(a^{17})^{33} \equiv b^{33}\ [55] \Leftrightarrow a^{40k+1} \equiv b^{33}\ [55]$
$\Leftrightarrow (a^{40})^k \times a \equiv b^{33}\ [55]$
$\Leftrightarrow 1^k \times a \equiv b^{33}\ [55]$ car $a^{40} \equiv 1\ [55]$
$\Leftrightarrow a \equiv b^{33}\ [55]$
$\Leftrightarrow b^{33} \equiv a\ [55]$.

Donc pour tout entier naturel a, si $a^{17} \equiv b\ [55]$ et si $a^{40} \equiv 1\ [55]$ alors $b^{33} \equiv a\ [55]$.