<u>Exercice 1 :</u> Sur 5 points *(commun à tous les candidats)*

Partie A

1. Dans l'urne on a un jeton blanc parmi 10 jetons donc la probabilité que le joueur tire un jeton blanc est $P(B) = \dfrac{1}{10}$ donc $P(\overline{B}) = \dfrac{9}{10}$

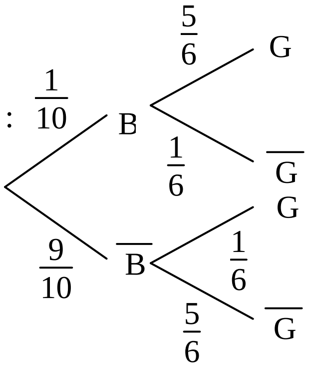
Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 donc $P_B(\overline{G}) = \dfrac{1}{6}$ donc

$P_B(G) = \dfrac{5}{6}$

Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6 donc $P_{\overline{B}}(G) = \dfrac{1}{6}$ donc

$P_{\overline{B}}(\overline{G}) = \dfrac{5}{6}$

On a ainsi l'arbre pondéré :



B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers donc en utilisant la formules des probabilités totales on a :

$P(G) = P(G \cap B) + P(G \cap \overline{B})$

$= P_B(G) \times P(B) + P_{\overline{B}}(G) \times P(\overline{B})$

$= \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{10}$

$\mathbf{P(G) = \dfrac{7}{30}}$

2. On veut calculer $P_{\overline{G}}(B)$:

$P_{\overline{G}}(B) = \dfrac{P(\overline{G} \cap B)}{P(\overline{G})}$

$= \dfrac{P_B(\overline{G}) \times P(B)}{1 - P(G)}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{10}}{1 - \dfrac{7}{30}}$ soit $P_{\overline{G}}(B) = \dfrac{1}{46}$

La probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu est égale à $\dfrac{1}{46}$.

3. On effectue quatre parties de façon indépendante et identique car il y a remise du jeton avec deux issues possibles, soit le joueur gagne soit il perd. La variable aléatoire Y égale au nombre de partie gagnée suit donc une loi binomiale de paramètre : n = 4 et p = P(G) = $\frac{7}{30}$.

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est :

$$P(Y = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(1 - \frac{7}{30}\right)^{4-2}$$

$$= 6 \times \left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(\frac{23}{30}\right)^2$$

$$= 0{,}192 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Sur quatre parties la probabilité qu'un joueur en gagne exactement deux est égale à 0,192 à 10^{-3} près.

4. Le joueur joue n parties de façon indépendante.
L'événement « gagner aucune partie » est l'événement contraire de « gagner au moins une partie »

P(« gagner aucune partie ») = $\left(P(\overline{G})\right)^n = \left(\frac{23}{30}\right)^n$

Donc P(« gagner au moins une partie ») = $1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n$

Déterminons n tel que $1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n > 0{,}99$:

$$1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n > 0{,}99$$

$$-\left(\frac{23}{30}\right)^n > -0{,}01$$

$$\left(\frac{23}{30}\right)^n < 0{,}01$$

$$\ln \left(\frac{23}{30}\right)^n < \ln 0{,}01 \quad \text{car la fonction ln est croissante sur }]\,0\,;+\infty\,[$$

$$n \ln \frac{23}{30} < \ln 0{,}01$$

$$n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{23}{30}}$$

$$n > 17{,}3$$

Le nombre minimal de parties qu'un joueur doit faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 est égale à 18.

Partie B

1.

a) Les valeurs possibles que peut prendre la variable X sont 5 – 1 = 4 € et 0 – 1 = – 1€.

$P(X = 4) = P(G) = \dfrac{7}{30}$ et $P(X = -1) = P(\overline{G}) = \dfrac{23}{30}$

Loi de probabilité de X :

$X = x_i$	-1	4
$P(X = x_i)$	$\dfrac{23}{30}$	$\dfrac{7}{30}$

Espérance E(X) :

$\mathbf{E(X)} = -1 \times \dfrac{23}{30} + 4 \times \dfrac{7}{30} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

b) $E(X) = \dfrac{1}{6} > 0$, **le jeu est donc défavorable pour l'organisateur.**

2. Dans cette nouvelle configuration : n est nombre de jetons noirs et n + 1 le nombre total de pions.

$P(B) = \dfrac{1}{n+1}$ et $P(\overline{B}) = \dfrac{n}{n+1}$

On a toujours $P_B(G) = \dfrac{5}{6}$ et $P_{\overline{B}}(G) = \dfrac{1}{6}$

B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers donc en utilisant la formules des probabilités totales on a :

$P(G) = P(G \cap B) + P(G \cap \overline{B})$

$= P_B(G) \times P(B) + P_{\overline{B}}(G) \times P(\overline{B})$

$= \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{n}{n+1}$

$P(G) = \dfrac{5+n}{6(n+1)}$

$\mathbf{P(G) = \dfrac{n+5}{6(n+1)}}$ donc $\mathbf{P(\overline{G})} = 1 - \dfrac{n+5}{6(n+1)} = \mathbf{\dfrac{5n+1}{6(n+1)}}$

Loi de probabilité de X :

$X = x_i$	-1	4
$P(X = x_i)$	$\dfrac{5n+1}{6(n+1)}$	$\dfrac{n+5}{6(n+1)}$

Espérance E(X) :

$E(X) = -1 \times \dfrac{5n+1}{6(n+1)} + 4 \times \dfrac{n+5}{6(n+1)}$

$= \dfrac{-5n - 1 + 4n + 20}{6(n+1)}$

$= \dfrac{19 - n}{6(n+1)}$

Le jeu est défavorable à l'organisateur si $E(X) \geq 0$ soit $\dfrac{19-n}{6(n+1)} \geq 0$ soit $0 < n \leq 19$.

Pour que le jeu soit défavorable à l'organisateur il faut qu'il utilise au plus 19 jetons noirs.

<u>Exercice 2 :</u> Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

1. Posons z = x + iy avec x et y deux réels.

$\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x - iy - 3i(x + iy) - 3 + 6i = 0$

$\Leftrightarrow x - iy - 3ix + 3y - 3 + 6i = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y - 3 + i(-3x - y + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -3x - y + 6 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{8} \\ y = \dfrac{3}{8} \end{cases}$

L'équation $\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$, $\overline{z}$ admet pour solution $z = \dfrac{15}{8} + i\,\dfrac{3}{8}$

2. Pour que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct il faut que B soit l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Donc $z_B = z_A\ e^{i\frac{\pi}{3}}$

Soit $z_B = (4 - 2i)\left(\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 2 + i\,2\sqrt{3} - i + \sqrt{3}$

$\mathbf{z_B = 2 + \sqrt{3} + i\left(2\sqrt{3} - 1\right)}$

3.

a) Pour tout point M d'affixe z différente de 2i,

$M \in (E) \Leftrightarrow \arg(z - 2i) = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{DM}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

L'ensemble (E) est donc la demi droite [DM) privée de D tel que :

$\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{DM}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

Dessin : voir plus bas.

b) Pour tout point M d'affixe z,

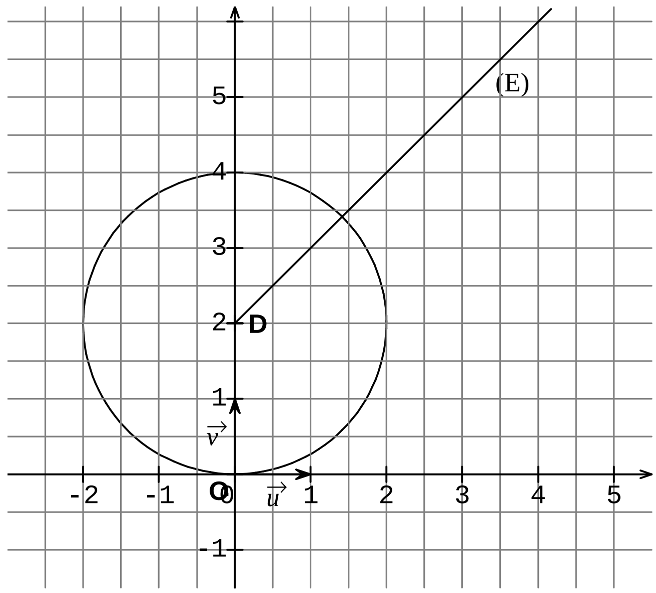
$M \in (F) \Leftrightarrow z = 2i + 2e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow z - 2i = 2e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z - 2i| = 2$ et $\arg(z - 2i) = \theta[2\pi]$

L'ensemble (F) est donc le cercle de centre D et de rayon 2.

Dessin : page suivante



4. Pour tout point M d'affixe $z \neq -2$

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{\overline{z}+2}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z}+2|$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z+2}|$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |z+2|$$

Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe – 2.

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow AM = BM.$$

Le point M d'affixe $z \neq -2$ appartient donc à la médiatrice du segment [AB].

<u>Exercice 3 :</u> Sur 5 points (*Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*)

1 .

a) E est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1) donc :

$x_E = \dfrac{2x_A + x_B}{3}$ $y_E = \dfrac{2y_A + y_B}{3}$ $z_E = \dfrac{2z_A + z_B}{3}$

soit $x_E = 0$; $y_E = -2$ et $z_E = 0$

Les coordonnées de E sont (0 : – 2 ; 0).

b) E est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 1) donc $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{ME}$

$M \in (P) \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{ME}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$

$\Leftrightarrow 3ME = 3MO$

$\Leftrightarrow ME = MO.$

L'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est donc **le plan médiateur du segment [OE].**

c) Comme (P) est le plan médiateur du segment [OE], un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{OE}$ de coordonnées (0 ; – 2 ; 0).

Une équation du plan (P) est donc : $0 \times x - 2 \times y + 0 \times z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

soit $-2y + d = 0$

Le milieu J du segment [OE] appartient au plan (P).

Les coordonnées de J sont (0 : – 1 ; 0).

Donc $-2 \times (-1) + d = 0$ soit $d = -2$.

Une équation du plan (P) est : $-2y - 2 = 0$ soit $y = -1$

2.

a) $AB = \sqrt{\left(-\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}\right)^2 + (0+3)^2 + (-4-2)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 36}$

$= 7$

Le rayon de la sphère (S) de diamètre [AB] est $\dfrac{AB}{2}$ soit $\dfrac{7}{2}$.

Soit H le projeté orthogonal de I sur le plan (P).

La distance du centre $I\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{3}{2}, -1\right)$ de la sphère au plan (P) d'équation $y + 1 = 0$ est la distance IH.

En utilisant la formule du cours : $\mathbf{IH} = \dfrac{\left|1 \times -\dfrac{3}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2}} = \dfrac{1}{2}$.

On a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{7}{2}$, l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b) Soit M (x , y , z) appartenant à (C).
M est à la fois sur la sphère de centre I et sur le plan (P).

Equation du (P) : y = –1.
Equation de la sphère de centre $I\left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -1\right)$ et de rayon $\frac{7}{2}$:

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z + 1)^2 = \frac{49}{4}.$$

Les coordonnées de M vérifient donc ces deux équations, on a :

$$M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z + 1)^2 = \frac{49}{4} \end{cases}$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}\right)^2 + (z + 1)^2 = \frac{49}{4}.$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = \frac{49}{4} - \frac{1}{4}$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = \frac{48}{4}$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$$

Une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z + 1)^2 = 12$.

(C) est un cercle de centre le point K $\left(-\frac{1}{3}, -1, -1\right)$ et de rayon $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 4\sqrt{3} - 1\right)$. $I\left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -1\right)$

a) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ID}$: $\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, 4\sqrt{3} - 1 + 1\right)$

Soit $\overrightarrow{ID}\ (0, 1, 4\sqrt{3})$

Une représentation paramétrique de la droite (ID) de vecteur directeur $\overrightarrow{ID}$ et passant par I est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{3}{2} + t \\ z = -1 + 4\sqrt{3}\, t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12$ et $y = -1$

Une représentation paramétrique de la droite (ID) de vecteur directeur $\overrightarrow{ID}$ et passant par I

est : $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{3}{2} + t \\ z = -1 + 4\sqrt{3}\,t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Déterminons si elle existe l'intersection entre la droite (ID) et le cercle (C) :

$\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)^2 + (-1 + 4\sqrt{3}\,t + 1)^2 = 12$ soit $(4\sqrt{3}t)^2 = 12$

$4\sqrt{3}\,t = 2\sqrt{3}$ ou $4\sqrt{3}\,t = -2\sqrt{3}$

$t = \frac{1}{2}$ ou $t = -\frac{1}{2}$

Or $y = -1 = -\frac{3}{2} + t$ donc seul $t = \frac{1}{2}$ convient.

$F\left(-\frac{1}{3}, -1, -1 + 2\sqrt{3}\right)$

Donc la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont les coordonnées sont $\left(-\frac{1}{3}, -1, -1 + 2\sqrt{3}\right)$.

<u>Exercice 3 :</u> Sur 5 points (*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Partie A

1. (Γ) est le cône d'axe $(O, \vec{k})$ et de sommet O donc une équation de (Γ) est $x^2 + y^2 = az^2$. $(a \neq 0)$
Le point A appartient au cône, donc ses coordonnées vérifient l'équation du cône.

$$1^2 + 3^2 = a \times 2^2 \qquad \text{soit } a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Une équation de (Γ) est donc $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.

2.

a) Le plan (P) est parallèle au plan (xOy) donc une équation de (P) est $z = k$
Le point B appartient au plan (P), donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan.
Une équation de (P) est donc $z = -4$.

b) Equation de (Γ) : $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.

Equation de (P) : $z = -4$.

Intersection (C_1) de (P) et (Γ) : $x^2 + y^2 = \frac{5}{2} \times (-4)^2 = 40$

L'intersection (C_1) de (P) et de (Γ) est un cercle de centre $(0, 0, -4)$ et de rayon $2\sqrt{10}$.

3. Equation de (Γ) : $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.

Equation de (Q) : $y = 3$.

Intersection (C_2) de (Q) et (Γ) : $x^2 + 9 = \frac{5}{2}z^2$ soit $x^2 - \frac{5}{2}z^2 = -9$

L'intersection (C_2) de (Γ) et de (Q) est **une hyperbole.**

<u>Autre raisonnement :</u>
La section d'un cône par un plan parallèle à l'axe du cône est une hyperbole lorsque le plan est strictement parallèle à l'axe du cône ce qui est le cas ici.

Partie B

1.

a) Pour décomposer 40 comme la somme de deux entiers relatifs au carré on a comme seules possibilités :
$x = 2$; $y = 6$ ou -6
$x = -2$; $y = 6$ ou -6
$x = 6$; $y = 2$ ou -2
$x = -6$; $y = 2$ ou -2.
L'équation (E) admet 8 couples de solutions :
$\{ (-6, -2) ; (-6, 2) ; (-2, -6) ; (-2, 6) ; (2, -6) ; (2, 6) ; (6, -2) ; (6, 2)\}$

b) (C_1) a pour équation $x^2 + y^2 = 40$ dans le plan (P) d'équation $z = -4$.
D'après la question précédente l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs sont les points :
$(-6, -2, -4)$; $(-6, 2, -4)$; $(-2, -6, -4)$; $(-2, 6, -4)$; $(2, -6, -4)$;
$(2, 6, -4)$; $(6, -2, -4)$; $(6, 2, -4)\}$

2.

a) Soit M de coordonnées (x, y, z) un point de (Γ) dont les coordonnées x, y et z sont des entiers relatifs.

x et y étant des entiers relatifs, x^2 et y^2 sont aussi des entiers donc $x^2 + y^2$ est un entier.

z étant un entier, z^2 est un entier.

M de coordonnées (x, y, z) est un point de (Γ), donc $2(x^2 + y^2) = 5z^2$

Or PGCD(5 ; 2) = 1, donc 2 divise z^2 d'après le théorème de Gauss.

z^2 est donc pair.

On en déduit que z est pair (en effet : le carré d'un entier impair est impair)

d'où : **z est divisible par 2**

Comme z est divisible par 2, alors il existe un entier relatif k non nul tel que z = 2k.

D'où si M est un point de (Γ) , on a : $2(x^2 + y^2) = 20k^2$

$$2(x^2 + y^2) = 2(10k^2)$$

$$x^2 + y^2 = 10k^2$$

donc $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b) Soit M de coordonnées (x, y, z) un point de (C_2) avec $(C_2) = (\Gamma)\cap(Q)$ dont les coordonnées x, y et z sont des entiers relatifs.

Donc $M \in (\Gamma)$ donc $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

$M \in (Q)$ donc y = 3.

Donc il existe un entier relatif k non nul tel que $x^2 + 9 = 10k$ soit $x^2 = 10k - 9$.

Soit $x^2 = 10k - 10 + 1 = 10(k - 1) + 1$.

Par conséquent on a **$x^2 \equiv 1$ modulo 10.**

c) Etudions les différents cas possibles :

$x \equiv 0\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 0\ [10]$

$x \equiv 1\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 1\ [10]$

$x \equiv 2\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 4\ [10]$

$x \equiv 3\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 9\ [10]$

$x \equiv 4\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 6\ [10]$

$x \equiv 5\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 5\ [10]$

$x \equiv 6\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 6\ [10]$

$x \equiv 7\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 9\ [10]$

$x \equiv 8\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 4\ [10]$

$x \equiv 9\ [10] \Rightarrow x^2 \equiv 1\ [10]$

Donc l'équation $x^2 \equiv 1\ [10]$ a pour solution : $x \equiv 1\ [10]$ ou $x \equiv 9\ [10]$

d) Un point de (C_2) est tel que $x^2 \equiv 1\ [10]$ soit $x \equiv 1\ [10]$ ou $x \equiv 9\ [10]$

On a par exemple x = 9, comme y = 3 on obtient $z^2 = \frac{2}{5}(9^2 + 3^2) = 36$ soit z = 6.

Un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le point de coordonnées (9 , 3 , 6).

<u>Exercice 4 :</u> Sur 6 points ***(commun à tous les candidats)***

Partie A

1.

a) Sur [1 ; 2] ln x > 0 et x > 0 donc x ln x > 0.
Par conséquent *f* est positive sur [1 , 2].
b) $f(1) = 1$ et $f(2) = 1 + 2\ln 2$.
Les coordonnées de M et N sont : M(1 , 1) et N(2 , 1 + 2 ln 2).
Le coefficient directeur de la droite (MN) est : $\dfrac{1 + 2\ln 2 - 1}{2 - 1}$ soit **2 ln 2.**
c) La fonction *f* est dérivable sur [1 , 2].
Les abscisses x des points en lequel les tangentes à C_f sont parallèles à la droite (MN) vérifient $f'(x) = 2\ln 2$.
On a pour tout x de [1 , 2], $f'(x) = \ln x + 1$.
Résolvons l'équation : $\ln x + 1 = 2\ln 2$

$$\ln x = \ln 4 - 1 \quad \text{car } 2\ln 2 = \ln 2^2 = \ln 4$$
$$\ln x = \ln 4 - \ln e \text{ car } \ln e = 1$$
$$\ln x = \ln \frac{4}{e}$$
$$x = \frac{4}{e}.$$

Sur l'intervalle [1, 2], le point E d'abscisse $\boldsymbol{\frac{4}{e}}$ est donc l'unique point de C_f, en lequel la tangente à C_f est parallèle à (MN).

d) Une équation de la tangente T à C_f au point E est : $y = f'\left(\frac{4}{e}\right)\left(x - \frac{4}{e}\right) + f\left(\frac{4}{e}\right)$.

$f'\left(\frac{4}{e}\right) = 2\ln 2$ (voir question précédente).

$f\left(\frac{4}{e}\right) = 1 + \frac{4}{e}\ln\left(\frac{4}{e}\right) = 1 + \frac{4}{e}\times \ln 4 - \frac{4}{e}\ln e = 1 + \frac{4}{e}\times 2\ln 2 - \frac{4}{e}$.

Une équation de T est donc : $y = 2\ln 2\left(x - \frac{4}{e}\right) + 1 + \frac{4}{e}\times 2\ln 2 - \frac{4}{e}$.

$$\mathbf{y = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e}}$$

2. Soit g la fonction définie sur [1, 2] par : $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1\right]$

a) La fonction *f* est dérivable sur [l , 2].

La fonction $x \mapsto (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e}$ est une fonction affine donc dérivable sur [l , 2].

Par somme de fonctions dérivables sur [l, 2], g est dérivable sur [l, 2]
Pour tout x de [l, 2] : $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2$

$$= \ln x + 1 - 2\ln 2$$
$$= \ln x - \ln 4 + 1$$
$$\mathbf{g'(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 1}$$

b) Pour tout x de [1 , 2],

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) = -\ln e$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) = \ln\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{e}$

$\mathbf{g'(x) > 0} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) > -1$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) > -\ln e$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) > \ln\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x > \frac{4}{e}$ car ln est une fonction croissante sur $]0 ; +\infty[$

Donc **sur $[1 , \frac{4}{e}[$, g'(x) < 0 donc g est décroissante et sur $]\frac{4}{e} , 2]$, g'(x) > 0 donc g est croissante.**

De plus $g\left(\frac{4}{e}\right) = 0$.

Donc la fonction g admet un minimum nul elle est donc positive ou nulle sur [1 ; 2].
On en déduit que la courbe C_f est au dessus de la tangente T sur [1 ; 2].

3.

a) Coordonnées de M(1 , 1) N(2 , 1 + 2 ln 2)

$M'\left(1 ,\ 2\ln 2 + 1 - \frac{4}{e}\right)$ $N'\left(2 ,\ 4\ln 2 + 1 - \frac{4}{e}\right)$

P (1 , 0) Q (2 , 0)

Aire de MNQP $A_{MNQP} = \frac{MP + QN}{2} \times PQ$

$= \frac{1 + 1 + 2\ln 2}{2} \times 1$

$\mathbf{A_{MNQP} = 1 + \ln 2}$

Aire de M'N'QP : $A_{M'N'QP} = \frac{M'P + QN'}{2} \times PQ$

$= \frac{2\ln 2 + 1 - \frac{4}{e} + 4\ln 2 + 1 - \frac{4}{e}}{2} \times 1$

$= \frac{6\ln 2 + 2 - \frac{8}{e}}{2}$

$\mathbf{A_{M'N'QP} = 3\ln 2 + 1 - \frac{4}{e}}$

b) On a $A_{M'N'QP} < A < A_{MNQP}$ soit $3\ln 2 + 1 - \frac{4}{e} < A < 1 + \ln 2$

Soit **1,6 < A < 1,7**

Partie B

1.
Posons u(x) = ln x et v'(x) = x

u'(x) = $\frac{1}{x}$ et v(x) = $\frac{x^2}{2}$

Par intégration par partie :

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2}dx$$

$$= 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \mathbf{2\ln 2 - \frac{3}{4}}.$$

2. *A* est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C_f , et les deux droites d'équations x = 1 et x = 2.

Comme *f* est positive sur [1 , 2] on a $A = \int_1^2 f(x)dx$

$$A = \int_1^2 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 (1 + x\ln x)dx$$

$$= \int_1^2 1.dx + \int_1^2 x\ln x dx$$

$$= [x]_1^2 + 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

$$= 1 + 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + 2\ln 2$$

La valeur exacte de *A* est $\frac{1}{4}$ + 2 ln 2.