Exercice 1 : (Sur 4 points)

1) Affirmation 1 : Les points A, B et C définissent un plan.

Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: (– 3, 1, 5)
Coordonnées de $\overrightarrow{AC}$: (– 2 , – 3 , 4)
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan. VRAI

2) Affirmation 2 : La droite (AC) est incluse dans le plan P.

A(2 , 1 , – 1) $2 - 2 \times 1 + (-1) + 1 = 2 - 2 - 1 + 1 = 0$ donc $A \in P$
C(0 , – 2 , 3) $0 - 2 \times (-2) + 3 + 1 = 0 + 4 + 4 = 8$ donc $C \notin P$
La droite (AC) n'est pas incluse dans le plan P. FAUX

3) Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : x + 8y – z – 11 = 0
Soit P' le plan d'équation : x + 8y – z – 11 = 0
A(2 , 1 , – 1) $2 + 8 \times 1 - (-1) - 11 = 2 + 8 + 1 - 11 = 0$ donc A ∈ P'
B(– 1 ; 2 ; 4) $-1 + 8 \times 2 - 4 - 11 = -1 + 16 - 4 - 11 = 0$ donc B ∈ P'
D(1 , 1 , – 2) $1 + 8 \times 1 - (-2) - 11 = 1 + 8 + 2 - 11 = 0$ donc D ∈ P'.
Donc **une équation cartésienne du plan (ABD) est : x + 8y – z – 11 = 0 VRAI**

4) Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

A(2 , 1 , – 1) $2 = 2k \Leftrightarrow k = 1;$
$1 = 2 + 3k \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3} \neq 1.$

Donc A n'appartient pas à la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R}$

Une représentation paramétrique de la droite (AC) n'est donc pas : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$
FAUX

5) Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: (– 3, 1, 5)
Coordonnées de $\overrightarrow{CD}$: (1 , 3, – 5)
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -3 \times 1 + 1 \times 3 + 5 \times (-5) = -3 + 3 - 25 = -25 \neq 0.$
Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas orthogonales. **FAUX**

6) Affirmation 6 : la distance du point C au plan P est égale à $4\sqrt{6}$
P : x – 2y + z + 1 = 0
Notons H le projeté orthogonale de C sur P.

$$HC = d(C,P) = \frac{|1 \times 0 - 2 \times (-2) + 1 \times 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = 8 \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$ **FAUX**

7) Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan P

P : x – 2y + z + 1 = 0
Notons J le projeté orthogonale de D sur P.

$$HD = d(D,P) = \frac{|1 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

La distance du point D au plan P est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

La sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est donc tangente au plan P **VRAI**

8) Affirmation 8 : le point E $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de C sur le plan P.

E $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ $-\frac{4}{3} - 2 \times \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + 1 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + \frac{3}{3} = 0$, donc E $\in$ P
Un vecteur normal au plan P est : $\overrightarrow{u}$ (1 , – 2 , 1)
Pour que le point E soit le projeté orthogonal de C sur le plan P il faut que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{EC}$ soient colinéaires.

Coordonnées de $\overrightarrow{EC}$: $\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Donc $\overrightarrow{EC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{u}$.

Le point E est donc le projeté orthogonal de C sur le plan P. **VRAI**

<u>Exercice 2</u> : (Sur 5 points) (Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1) Résolution de $z^2 + 4z + 8 = 0$:

$\Delta = 16 - 4 \times 8 = -16 = (4i)^2$

2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{-4-4i}{2} = -2-2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = -2+2i$.

Les solutions de l'équation sont : $z_1 = -2-2i$ et $z_2 = -2+2i$.

Formes trigonométriques de z_1 et z_2 :

$z_1 = -2-2i$ $\quad |z_1| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Soit $z_1 = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

argument θ_1 de z_1 vérifient $\begin{cases} \cos\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_1 = -\dfrac{3\pi}{4}$

Donc $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

Donc $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

2) a) Le point C est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc :

$c - 0 = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-0)$

$c = ib$

$c = i(-2+2i)$

$\mathbf{c = -2-2i}$

b) Le point D est l'image du point C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc :

$d - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$

$d = i(c-a) + a$

$d = i(-2-2i-2+2i) + 2 - 2i$

$d = -4i + 2 - 2i$

$\mathbf{d = 2-6i}$

c) Voir figure en fin d'exercice

Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $b - a = -2 + 2i - 2 + 2i = -4 + 4i$

Affixe de $\overrightarrow{DC}$: $c - d = -2 - 2i - 2 + 6i = -4 + 4i$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.**

3) a) G_α est le barycentre du système : $\{(A\,;1)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;\alpha)\}$ donc :

$\overrightarrow{AG_\alpha} - \overrightarrow{BG_\alpha} + \alpha\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{0}$

$\alpha\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{BG_\alpha} + \overrightarrow{G_\alpha A}$

$\alpha\overrightarrow{CG_\alpha} = \overrightarrow{BA}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{CG_\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}}$

b) On a $\overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}$, donc $\overrightarrow{CG_\alpha}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires.

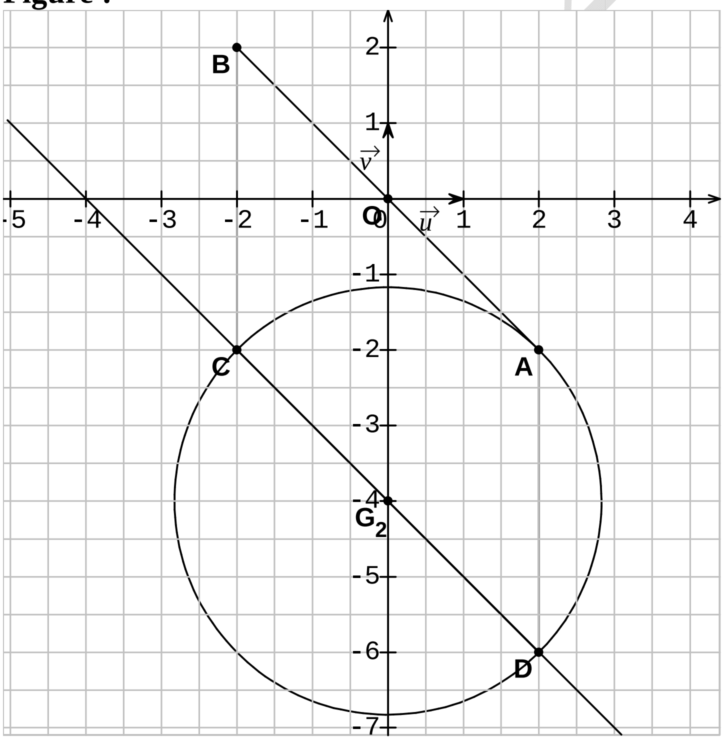
Donc lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls, le point G_α décrit **la droite passant par C et parallèle à la droite (AB) soit la droite (CD) car (AB) et (CD) sont parallèles.**

c) On a $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ car ABCD est donc un parallélogramme.
Donc pour $\alpha = 1$ on a $G_\alpha = D$.

4) On suppose que $\alpha = 2$.
G_2 est le barycentre du système : {(A ; 1) ; (B ; – 1) ; (C ; 2)} donc pour tout point M du plan on a :
$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_2}$
Pour tout point M du plan : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \|\,2\overrightarrow{MG_2}\,\| = 4\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow 2MG_2 = 4\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow MG_2 = 2\sqrt{2}$
L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$ **est donc le cercle de centre G_2 et de rayon $2\sqrt{2}$.**

Construction de G_2 :
On utilise la relation $\overrightarrow{CG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ donc G_2 est le milieu de [CD].
Construction du cercle :
On a $CD = |d - c| = |4 - 4i| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ donc $\frac{CD}{2} = CG_2 = 2\sqrt{2}$
L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$ est donc le cercle de centre G_2 milieu de [CD] et passant par C.

Figure :



<u>Exercice 2</u> : (Sur 5 points) (Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. Voir figure en fin d'exercice.

2. Montrons que OABC est un rectangle :
Affixe de $\overrightarrow{OA}$: $a - 0 = 2$
Affixe de $\overrightarrow{CB}$: $b - c = 2$ Donc OABC est un parallélogramme
Comme a est un réel pur et c un imaginaire pur on en déduit que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux
Donc OABC est un rectangle.

$OA = |a - 0| = 2$ et $OC = |c - 0| = 3$ Donc $\dfrac{\textbf{longueur de OABC}}{\textbf{largeur OABC}} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{3}{2}$

Montrons que ABDE est un rectangle :
Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $b - a = 3i$
Affixe de $\overrightarrow{ED}$: $d - e = 3i$ Donc ABDE est un parallélogramme
Affixe de $\overrightarrow{AE}$: $e - a = -\dfrac{9}{2}$ Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0$
Donc ABDE est un rectangle.

$AB = |b - a| = 3$ et $AE = |e - a| = \dfrac{9}{2}$ Donc $\dfrac{\textbf{longueur de ABDE}}{\textbf{largeur ABDE}} = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{\frac{9}{2}}{3} = \dfrac{3}{2}$

Donc $\dfrac{\textbf{longueur de OABC}}{\textbf{largeur OABC}} = \dfrac{\textbf{longueur de ABDE}}{\textbf{largeur ABDE}}$

OABC et ABDE sont donc deux rectangles semblables.

3. Etude d'une similitude directe transformant OABC en ABDE

a) L'écriture complexe de la similitude directe s est de la forme : $z' = a'z + b'$.
On a $s(O) = A$ et $s(A) = B$.
Donc il existe deux réels a' et b' tels que : $\begin{cases} a = a' \times 0 + b' \\ b = a' \times a + b' \end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases} b' = 2 \\ 2 + 3i = 2a' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b' = 2 \\ a' = \dfrac{3}{2}i \end{cases}$

L'écriture complexe de la similitude directe s qui transforme O en A et A en B est :

$$z' = \frac{3}{2}\, i\, z + 2.$$

b) Déterminons les images de B et C par s.

$\dfrac{3}{2} ib + 2 = \dfrac{3}{2}i(2 + 3i) + 2 = 3i - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{5}{2} + 3i$ donc $s(B) = D$

$\dfrac{3}{2} ic + 2 = \dfrac{3}{2}i(3i) + 2 = -\dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{5}{2}$ donc $s(C) = E$

On a donc : $s(O) = A$; $s(A) = B$; $s(B) = D$ et $s(C) = E$
La similitude s transforme donc OABC en ABDE.

c) L'angle de la similitude est : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB})$ soit $\dfrac{\pi}{2}$.

d s o s (O) = s(A) = B
s o s (A) = s(B) = D

s est une similitude d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, donc s $\circ$ s est une similitude d'angle $2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi$.

s o s (O) = B $\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}) = \pi$ donc Ω, O et B sont alignés.
s o s (A) = D $\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = \pi$ donc Ω, A et D sont alignés.

Donc Ω appartient aux droites (OB) et (AD), c'est donc le point d'intersection de ces deux droites.

4. Etude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED.

a) L'écriture complexe de la similitude indirecte s' est de la forme : $z' = a''\,\overline{z} + b''$.

On a s'(O) = B et s'(A) = A.

Donc il existe deux réels a'' et b'' tels que : $\begin{cases} b = a'' \times 0 + b'' \\ a = a'' \times \overline{a} + b'' \end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases} b'' = 2 + 3i \\ 2 = 2a'' + 2 + 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b'' = 2 + 3i \\ a'' = -\dfrac{3}{2}\,i \end{cases}$

L'écriture complexe de la similitude indirecte s' qui transforme O en B et qui laisse A invariant est : $z' = -\dfrac{3}{2}\,i\,\overline{z} + 2 + 3i$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

b) Déterminons les images de B et C par s'.

$$-\frac{3}{2}\,i\,\overline{b} + 2 + 3i = -\frac{3}{2}\,i(2 - 3i) + 2 + 3i = -3i - \frac{9}{2} + 2 + 3i = -\frac{5}{2} \quad \text{donc } s'(B) = E$$

$$-\frac{3}{2}\,i\,\overline{c} + 2 + 3i = -\frac{3}{2}\,i(-3i) + 2 + 3i = -\frac{9}{2} + 2 + 3i = -\frac{5}{2} + 3i \quad \text{donc } s'(C) = D$$

On a donc : s'(O) = B ; s'(A) = A ; s'(B) = E et s'(C) = D
La similitude s' transforme donc OABC en BAED.

c) s' est une similitude indirecte donc s' est la composée d'une réflexion f et d'une similitude directe g. s' = g o f.

Supposons que f est la réflexion d'axe (OA), donc f(A) = A et comme s'(A) = A alors g(A) = A.
De plus s'(O) = B et g $\circ$ f (O) = g(O) donc g(O) = B. g n'est donc pas l'identité.
g est donc une similitude directe de centre A.

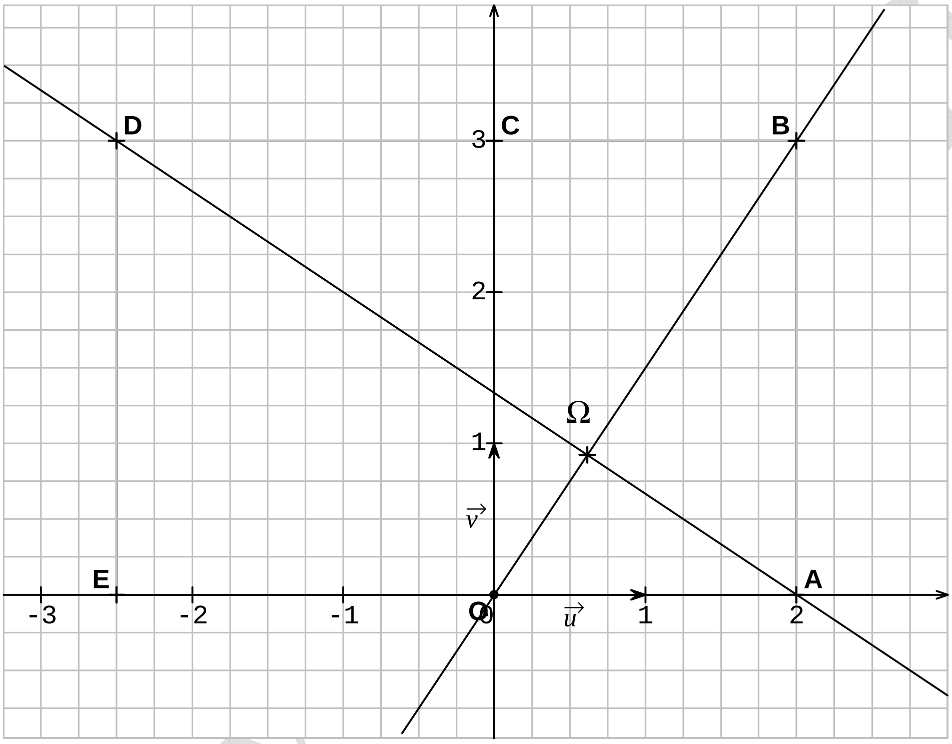
La réflexion d'axe (OA) a pour écriture complexe $z' = \overline{z}$.

Comme l'écriture complexe de la similitude indirecte s' est : $z' = -\dfrac{3}{2}\,i\,\overline{z} + 2 + 3i$ alors l'écriture complexe de g est : $z' = -\dfrac{3}{2}i\,z + 2 + 3i$.

On a $\left|-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2}$ et $\arg\left(-\frac{3}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$ Donc g a pour rapport $\frac{3}{2}$ et pour angle $-\frac{\pi}{2}$.

s' est donc la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie de la similitude directe de centre A de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

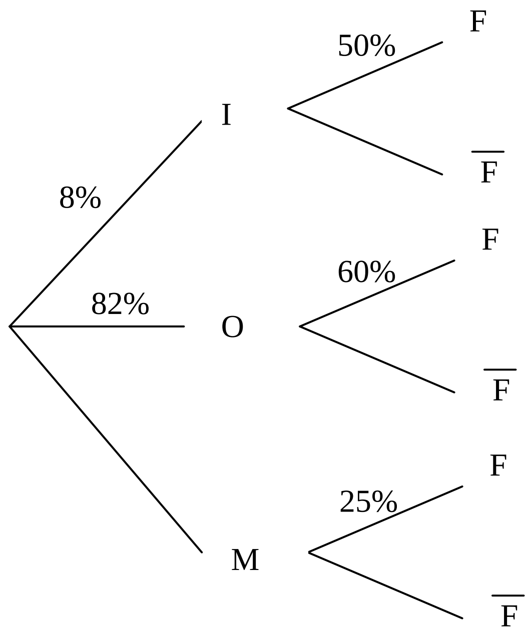
Figure :



<u>Exercice 3</u> : (4 points)

I) Partie A

1.



2. **a)** I, M et O forment une partition de l'univers du personnel de l'entreprise. D'où :

$1 = P(M) + P(I) + P(O)$

$P(M) = 1 - P(I) - P(O)$

$P(M) = 1 - \frac{8}{100} - \frac{82}{100}$

P(M) = 10 %

b) $P(M \cap F) = P(M) \times P_M(F)$

$P(M \cap F) = \frac{10}{100} \times \frac{25}{100}$

P(M∩F) = 2,5 %

c) I, M et O forment une partition de l'univers du personnel de l'entreprise.
Donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(F) = P(M \cap F) + P(I \cap F) + P(M \cap F)$

$P(F) = P(M) \times P_M(F) + P(I) \times P_I(F) + P(O) \times P_O(F)$

$P(F) = \frac{2{,}5}{100} + \frac{8}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{82}{100} \times \frac{60}{100}$

$P(F) = \frac{2{,}5}{100} + \frac{4}{100} + \frac{49{,}2}{100}$

P(F) = 55,7 %

II) Partie B

D'après l'énoncé : $P(\overline{B} \cap A) = 0{,}002$

$P(B \cap \overline{A}) = 0{,}003$

$P(B) = 0{,}04$

1. A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la loi des probabilités totales :

   $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

   $P(B \cap A) = P(B) - P(B \cap \overline{A})$

   $P(B \cap A) = 0{,}04 - 0{,}003$

   $\mathbf{P(B \cap A) = 0{,}037}$ ou $P(B \cap A) = 3{,}7\%$

2. B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la loi des probabilités totales :

   $P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A)$

   $P(A) = 0{,}037 + 0{,}002$

   $\mathbf{P(A) = 0{,}039}$ ou $P(A) = 3{,}9\ \%$

3. $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

   $P_A(B) = \dfrac{0{,}037}{0{,}039}$

   $\mathbf{P_A(B) \approx 0{,}949}$ ou $P_A(B) = 94{,}9\ \%$

<u>Exercice 4</u> : (Sur 7 points) *Commun à tous les candidats*

I) Restitution organisée des connaissances

Pré requis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

1. Posons $X = e^x$, d'où : $\ln X = x$ pour tout $X > 0$ et : $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc X tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\ln X}$ c'est à dire : $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\ln X} = +\infty$ d'après le pré requis

Or : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t} = 0$

Donc, si on pose : $t = \dfrac{X}{\ln X}$, on a par composition : $\boldsymbol{\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0}$

2. <u>Si n = 1</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ d'après **1.**

<u>Si n est un entier naturel n supérieur ou égal à 2</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} \times \dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} \times \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (d'après **1.**)

Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-1} = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ par produit.

Pour tout entier naturel n non nul : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0}$

II) Étude d'une fonction *f*

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$.

a) u est la somme d'un polynôme et de la composée d'un polynôme avec la fonction logarithme népérien, donc u est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Soit u' sa dérivée :

$u'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x}$

Sur $]0 ; +\infty[$: $3x^2 > 0$ et $\dfrac{2}{x} > 0$

donc : $u'(x) > 0$

La fonction u est donc strictement croissante sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

b) u(1) = 1 – 1 + 2 ln 1

u(1) = 0

De plus, u est strictement croissante sur]0 ; + ∞[, d'où :

u(x) < 0 sur]0 ;1[

u(x) > 0 sur]1 ; + ∞[

2. Étude de la fonction *f*.

a) $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$

Donc : par soustraction : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ (d'après **I)**)

Donc : par soustraction : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) *f* est la différence de la fonction identité (dérivable sur]0 ; + ∞[ ) et du quotient de la fonction logarithme népérien par la fonction carré (dérivables sur]0 ; + ∞[ ), donc *f* est dérivable sur]0 ; + ∞[. Soit *f '* sa dérivée.

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u(x)}{x^3}}$$

Or : sur]0 ; + ∞[, $x^3 > 0$

Donc *f '* (x) a le même signe que u(x).

D'après **1)b)**, on en déduit donc les **variations de la fonction *f*** :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		–		+	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. Éléments graphiques et tracés.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{\ln x}{x^2}$

Donc d'après I) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

D'où la droite (Δ) d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe *C* en + ∞.

b) $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

$-\dfrac{1}{x^2}$ est négatif pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$

$\ln x < 0$ sur $]0 ; 1[$

$\ln 1 = 0$

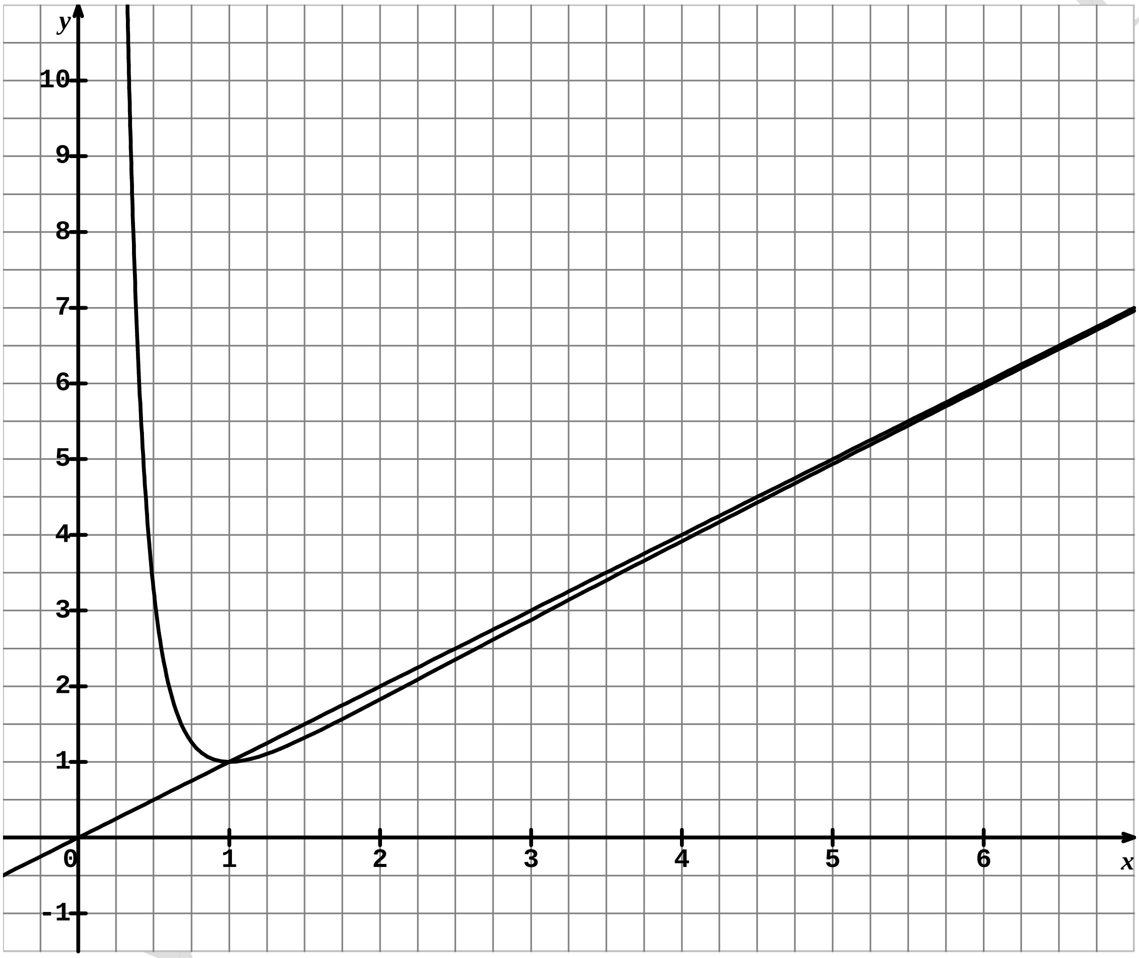
$\ln x > 0$ sur $]1 ; +\infty[$

D'où : **Sur]0 ; 1[$f(x) - x > 0$ donc C est au-dessus de (Δ).**

Pour x = 1 $f(x) - x = 0$ donc C et (Δ) se coupent

Sur]1 ; + ∞[$f(x) - x < 0$ donc C est en-dessous de (Δ).

c) courbe *C* et droite (Δ)



III) Calculs d'aires.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a) $A(\alpha)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan, délimitée par : la courbe *C*, la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.
Or si $\alpha > 1$, C est située en-dessous de (Δ) sur $[1 ; \alpha]$, donc :
$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} (x - f(x))\, dx$

$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Posons : $u(x) = \ln x$ d'où : $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x^2}$ d'où : $v(x) = -\frac{1}{x}$

En intégrant par parties, on a :

$A(\alpha) = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} -\frac{1}{x^2}\,dx$

$A(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}\ln\alpha + \int_1^{\alpha}\frac{1}{x^2}\,dx$

$A(\alpha) = -\frac{\ln\alpha}{\alpha} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\alpha}$

$\boldsymbol{A(\alpha) = -\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1}$ **c'est à dire :** $A(\alpha) = 1 - \frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$

b) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{\ln\alpha}{\alpha} = 0$ d'après I)

et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$

Donc : par somme : $\boldsymbol{\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = 1}$

$\ell = 1$

2. $0 < \frac{1}{e} < 1$

Donc C est située au-dessus de (Δ) sur $[\frac{1}{e};1]$, donc :

$A\left(\frac{1}{e}\right) = \int_{1/e}^{1} (f(x) - x)\,dx$

$A\left(\frac{1}{e}\right) = \int_{1}^{1/e} (x - f(x))\,dx$

En intégrant par parties de la même façon que dans la question précédente, on trouve :

$A\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} - \frac{1}{\frac{1}{e}}$

$A\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - (-\ln e) \times e - e$

$A\left(\frac{1}{e}\right) = 1$

D'où : $\boldsymbol{\ell = A\left(\frac{1}{e}\right)}$