

**Exercice 1 : Sur 4 points (commun à tous les candidats)****Partie A**

On note les événements :

- A : « le tirage se fait dans l'urne A » ;
- B : « le tirage se fait dans l'urne B » ;
- N : « on tire une boule noire » ;
- R : « on tire une boule rouge ».

Représentons la situation par un arbre :

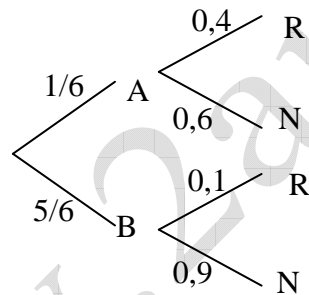
Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A donc  $P(A) = \frac{1}{6}$ , sinon il tire au hasard une boule de l'urne B donc  $P(B) = \frac{5}{6}$ .

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires :

$$\text{Donc } P_A(R) = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ et } P_A(N) = \frac{6}{10} = 0,6$$

Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.

$$\text{Donc } P_B(R) = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ et } P_B(N) = \frac{9}{10} = 0,9.$$



1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ».

A et B forment une partition de l'ensemble des tirages, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap A) + P(R \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(R) + P(B) \times P_B(R) \\ &= \frac{1}{6} \times 0,4 + \frac{5}{6} \times 0,1 = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

$$P(R) = 0,15$$

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est égale à :

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{4}{9}$$

Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de B est égale à :

$$P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{9}$$

Donc  $P_R(A) < P_R(B)$

**Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A n'est pas supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B.**

### Partie B

1. Loi de probabilité de G :

Le jouer répète deux fois la même épreuve de façon indépendante avec deux issues possibles, soit la boule est rouge avec un probabilité  $P(R) = 0,15$  (succès) soit elle ne l'est pas avec une probabilité  $P(N) = 0,85$  (échec).

Notons X la variable correspondant au nombre de boule rouge tirée, alors X peut prendre les valeurs, 0, 1 ou 2.

La variable aléatoire suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 2$  et  $p = 0,15$ .

On a donc  $P(X = k) = \binom{2}{k} (0,15)^k (0,85)^{2-k}$  avec k entier compris entre 0 et 2.

Donc :

$$P(X = 2) = P(G = 2x) = \binom{2}{2} (0,15)^2 (0,85)^{2-2} = 0,0225$$

$$P(X = 1) = P(G = x - 2) = \binom{2}{1} (0,15)^1 (0,85)^{2-1} = 0,255$$

$$P(X = 0) = P(G = -4) = \binom{2}{0} (0,15)^0 (0,85)^{2-0} = 0,7225$$

$g_i$	$2x$	$x - 2$	$-4$
$P(G = g_i)$	0,0225	0,255	0,7225

2.  $E(G) = 2x \times 0,0225 + (x - 2) \times 0,255 - 4 \times 0,7225$

**Donc  $E(G) = 0,3x - 3,4$**

3.  $E(G) \geq 0 \Leftrightarrow 0,3x - 3,4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 0,3x \geq 3,4$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{34}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 11,3$$

Comme x est un entier, on a  $E(G) \geq 0$  pour des valeurs de x supérieur ou égal à 12.

**Exercice 2 : Sur 5 points (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)****Partie A**

1. Soit  $z$  un nombre complexe d'argument  $\frac{\pi}{3}$ .

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ donc } 100\text{arg}(z) = 100 \times \frac{\pi}{3} [2\pi] = \frac{102\pi - 2\pi}{3} [2\pi] = 34\pi - \frac{2\pi}{3} [2\pi] = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{Comme } 100\text{arg}(z) = \text{arg}(z^{100}) \quad \text{On a alors } \text{arg}(z^{100}) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

Pour que  $z^{100}$  soit un nombre réel il faut que  $\text{arg}(z^{100}) = k\pi$  avec  $k$  dans  $\mathbf{Z}$

**La proposition 1 est donc fausse.**

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe  $z$  différente de 1 du plan telle que  $\left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$ .

Notons le point A d'affixe 1.

$$M \in (E) \Leftrightarrow \left| \frac{z}{1-z} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z}{z_A - z} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{OM}{AM} = 1 \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [OA].$$

Comme A est un réel, la médiatrice de [OA] est donc perpendiculaire à l'axe des réels, soit parallèle à l'axe des imaginaires purs.

**La proposition 2 est donc fausse.**

3. Soit  $r$  la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  et dont le centre K a pour affixe  $1 + i\sqrt{3}$ .

Notons  $O'$  l'image de O par la rotation  $r$ .

$$\text{On a donc : } z_{O'} - z_K = e^{-\frac{\pi}{2}} (z_O - z_K)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } z_{O'} &= -i(0 - 1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} \\ &= i - \sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} \\ &= (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

**La proposition 3 est donc vraie.**

4. On considère l'équation (E) suivante :  $z^2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$ .

$$\text{Discriminant : } \Delta = 4 \left( \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^2 - 4 = 4 \left( \left( \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^2 - 1 \right) = -4 \left( \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^2$$

Donc  $\Delta < 0$ , l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad \text{et } z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\text{On a } |z_1| = |z_2| = \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2} = 1$$

**La proposition 4 est donc vraie.**

**Partie B**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \times BA = 1 \times 1 = 1$  car A est le projeté orthogonal de D sur (AB)

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \times BC = 1 \times 1 = 1$  car C est le projeté orthogonal de D sur (BC)

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  car (BF) et (BD) sont orthogonales.

Donc  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) \cdot \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BE} \\ &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BE}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = BA \times BA = 1 \times 1 = 1$  car A est le projeté orthogonal de E sur (AB)

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$  car (BC) et (BE) sont orthogonales.

$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BE} = BF \times BF = 1 \times 1 = 1$  car F est le projeté orthogonal de E sur (BF)

Donc  $\overrightarrow{AG}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE),

**Par conséquent le vecteur  $\overrightarrow{AG}$  est normal au plan (BDE).**

**La proposition 5 est donc vraie.**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{ED} &= (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= EA^2 + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= EA^2 + 0 + 0 + 0 \\ &= 1 \neq 0\end{aligned}$$

**Donc les droites (EB) et (ED) ne sont pas perpendiculaires.**

**La proposition 6 est donc fausse.**

**Exercice 2 : Sur 5 points (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)**

1. **Proposition 1** : «  $f = r \circ h$  où  $h$  est l'homothétie de rapport  $3\frac{\sqrt{2}}{2}$  et de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $-2 - 2i$  et où  $r$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  ». **VRAI**

$$h(z) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(z - (-2 - 2i)) + (-2 - 2i) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}(z + 2 + 2i) - 2 - 2i$$

$$r(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - (-2 - 2i)) + (-2 - 2i) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z + 2 + 2i) - 2 - 2i$$

$$\text{D'où : } r \circ h(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(h(z) + 2 + 2i) - 2 - 2i$$

$$r \circ h(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}(z + 2 + 2i) - 2 - 2i + 2 + 2i\right) - 2 - 2i$$

$$r \circ h(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}(z + 2 + 2i) - 2 - 2i\right)$$

$$r \circ h(z) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z + 2 + 2i) - 2 - 2i$$

$$r \circ h(z) = \frac{3}{2}(1 - i)z + \frac{3}{2}(1 - i) \times 2(1 + i) - 2 - 2i$$

$$r \circ h(z) = \frac{3}{2}(1 - i)z + 6 - 2 - 2i$$

$$r \circ h(z) = \frac{3}{2}(1 - i)z + 4 - 2i$$

$$r \circ h(z) = f(z)$$

2. Pour tout entier naturel  $n$  non nul :

**Proposition 2** : «  $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 5 ». **FAUX**

$5^{6n+1}$  est divisible par 5 donc :  $5^{6n+1} \equiv 0 [5]$

$2^{3n+1}$  n'est divisible que par des puissances de 2, donc n'est pas divisible par 5, d'où :

$2^{3n+1} \equiv k [5]$  avec  $k$  un entier naturel tel que :  $1 \leq k \leq 4$

D'où :  $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv k [5]$  avec  $k$  un entier naturel tel que :  $1 \leq k \leq 4$

**$5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  n'est pas divisible par 5**

**Proposition 3** : «  $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 7 ». **VRAI**

$$5^6 \equiv 1 [7] \quad \text{et} \quad 2^3 \equiv 1 [7]$$

$$5^{6n} \equiv 1^n [7] \quad \text{et} \quad 2^{3n} \equiv 1^n [7]$$

$$5^{6n} \equiv 1 [7] \quad \text{et} \quad 2^{3n} \equiv 1 [7]$$

$$5^{6n+1} \equiv 5 [7] \quad \text{et} \quad 2^{3n+1} \equiv 2 [7]$$

Donc :  $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 [7]$  d'où  **$5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 7**

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation  $11x - 5y = 14$ .

**Proposition 4** : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées  $(5k + 14 ; 11k + 28)$  où  $k \in \mathbf{Z}$  ». **VRAI**

Le couple  $(14 ; 28)$  est un point de (D) car  $11 \times 14 - 5 \times 28 = 14$

Si  $(x ; y)$  sont les coordonnées entières d'un point de (D), alors

$$11x - 5y = 11 \times 14 - 5 \times 28$$

$$11(x - 14) = 5(y - 28)$$

11 et 5 sont premiers entre eux donc : 11 divise  $y - 28$  et 5 divise  $x - 14$

D'où : il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $x - 14 = 5k$  et  $y - 28 = 11k$

C'est à dire :  $x = 5k + 14$  et  $y = 11k + 28$

De plus, pour tout  $k$  entier relatif, on a :

$$11(5k + 14) - 5(11k + 28) = 11 \times 14 - 5 \times 28$$

$$11(5k + 14) - 5(11k + 28) = 14$$

Donc si  $(x ; y) = (5k + 14 ; 11k + 28)$  avec  $k \in \mathbf{Z}$ , alors  $(x ; y)$  sont les coordonnées entières d'un point de (D)

**Donc les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées  $(5k + 14 ; 11k + 28)$  où  $k \in \mathbf{Z}$**

4. **Proposition 5** : « la section de la surface  $\Sigma$  et du plan d'équation  $x = \lambda$ , où  $\lambda$  est un réel, est une hyperbole ». **FAUX**

Soit P le plan d'équation  $x = \lambda$

$$M(x,y,z) \in \Sigma \cap P \Leftrightarrow z = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad x = \lambda$$

$$M(x,y,z) \in \Sigma \cap P \Leftrightarrow z = \lambda^2 + y^2 \quad \text{et} \quad x = \lambda$$

C'est une équation de parabole dans le plan P de sommet  $(\lambda, 0, \lambda^2)$

**Donc ce n'est pas l'équation d'une hyperbole**

**Proposition 6** : « le plan d'équation  $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$  partage le solide délimité par  $\Sigma$  et le plan d'équation  $z = 9$  en deux solides de même volume ». **VRAI**

Soit  $V_1$  le volume du solide délimité par  $\Sigma$  et le plan d'équation  $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

Soit  $V_2$  le volume du solide délimité par  $\Sigma$ , le plan d'équation  $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ , et le plan d'équation  $z = 9$

La section de  $\Sigma$  par le plan d'équation  $z = k$  a pour équation  $k = x^2 + y^2$ .

C'est un cercle de rayon  $\sqrt{k}$ , d'où l'aire du disque associé :  $\pi k$

$$V_1 = \int_0^{\frac{9\sqrt{2}}{2}} \pi k \, dk \quad \text{et}$$

$$V_1 = \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{9\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 0^2 \right] \quad \text{et}$$

$$V_1 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{9^2}{2} \right) \quad \text{et}$$

$$\text{D'où : } V_1 = V_2$$

$$V_2 = \int_{\frac{9\sqrt{2}}{2}}^9 \pi k \, dk$$

$$V_2 = \frac{\pi}{2} \left[ 9^2 - \left( \frac{9\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right]$$

$$V_2 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{9^2}{2} \right)$$

**Exercice 3 : Sur 6 points (commun à tous les candidats)****Partie A. Démonstration de cours**

Soit  $(u_n)$  une suite croissante non majorée.

$(u_n)$  est non majorée donc pour tout réel  $A$ , il existe un entier naturel  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ .

$(u_n)$  est croissante, donc pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \geq u_{n_0}$ .

Donc, pour tout réel  $A$ , il existe un entier naturel  $n_0$  tel que : pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $u_n > A$ .

**Donc la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .** (Pré requis).

**Partie B**

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  par somme et composée de fonctions dérivables.

Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \times 2x & (\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\ &= \frac{1}{1+x} + x \end{aligned}$$

Sur  $[0 ; +\infty[$   $x \geq 0$  et  $\frac{1}{1+x} > 0$  donc  $f'(x) > 0$

**Par conséquent  $f$  est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .**

2. Une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ f'(0) &= 1 \text{ et } f(0) = 0 \end{aligned}$$

**Donc une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est :  $y = x$ .**

3. Voir graphique en fin d'exercice

**Partie C**

1. Voir graphique en fin d'exercice

Rq : Le graphique du sujet ne permet de construire seulement les trois premiers termes.

2. Au vu du graphique on peut conjecturer que la suite est croissante et diverge vers  $+\infty$ .

3. a) Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

Au rang 0 :  $u_0 = 1$  donc  $u_0 \geq 1$  La propriété est vraie au rang 0.

Supposons à un rang  $n$  la propriété vraie :  $u_n \geq 1$ .

Au rang  $n + 1$  :

La fonction  $f$  est croissante sur  $[0 ; +\infty[$  donc :  $f(u_n) \geq f(1)$

$$\text{Comme } u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } f(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} > 1 \quad \text{On a donc } u_{n+1} \geq 1.$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ .

La propriété est donc héréditaire et comme elle est vraie pour  $n = 0$ , elle est donc vraie pour tout  $n$ .

**Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .**

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

On sait que, sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , la courbe (C) est située au dessus de la droite (T) donc  $f(x) > x$

De plus  $u_n \in ]0 ; +\infty[$ , car  $u_n \geq 1$ .

Par conséquent  $f(u_n) > u_n$  donc  $f(u_n) - u_n > 0$ .

**La suite  $(u_n)$  est croissante.**

c) Si la suite  $(u_n)$  était majorée, elle aurait pour limite un réel  $L > 2$  (puisque  $u_3 > 2$  d'après partie C 1. et que  $(u_n)$  est croissante).

Or  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $f$  est continue donc par passage à la limite on a  $L = f(L)$ .

$$L = \ln(1 + L) + \frac{1}{2}L^2$$

$$L - \frac{1}{2}L^2 = \ln(1 + L)$$

$$L(1 - \frac{1}{2}L) = \ln(1 + L).$$

$$L > 2 \Rightarrow -\frac{1}{2}L < -1 < 0$$

$$L > 0$$

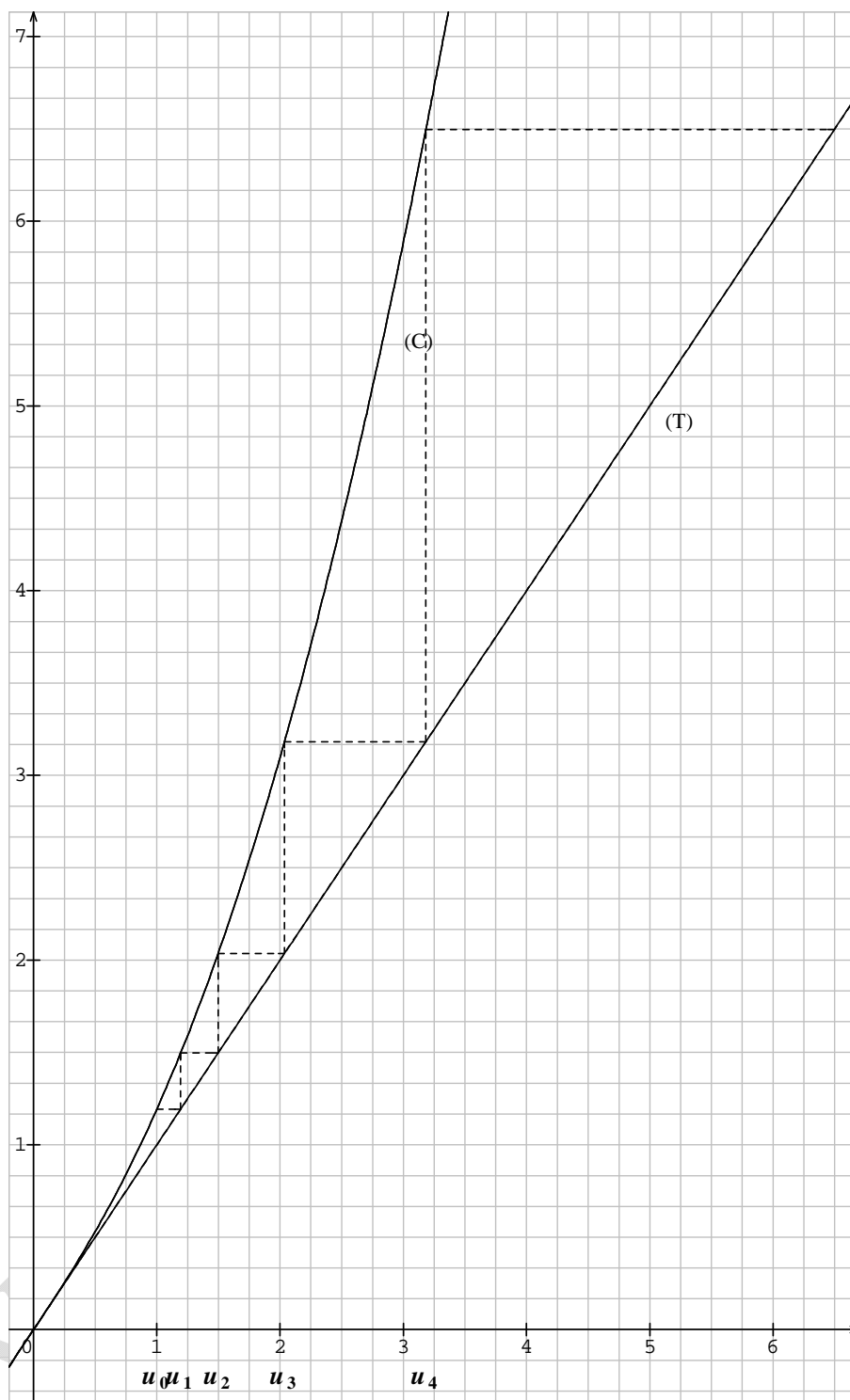
$$\text{soit } L(L - \frac{1}{2}L) < 0$$

Or  $\ln(1 + L) > 0$  car  $L > 2 \Rightarrow L + 1 > 3$

$\Rightarrow \ln(L + 1) > \ln 3 > 0$  (la fonction  $\ln$  est croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .)

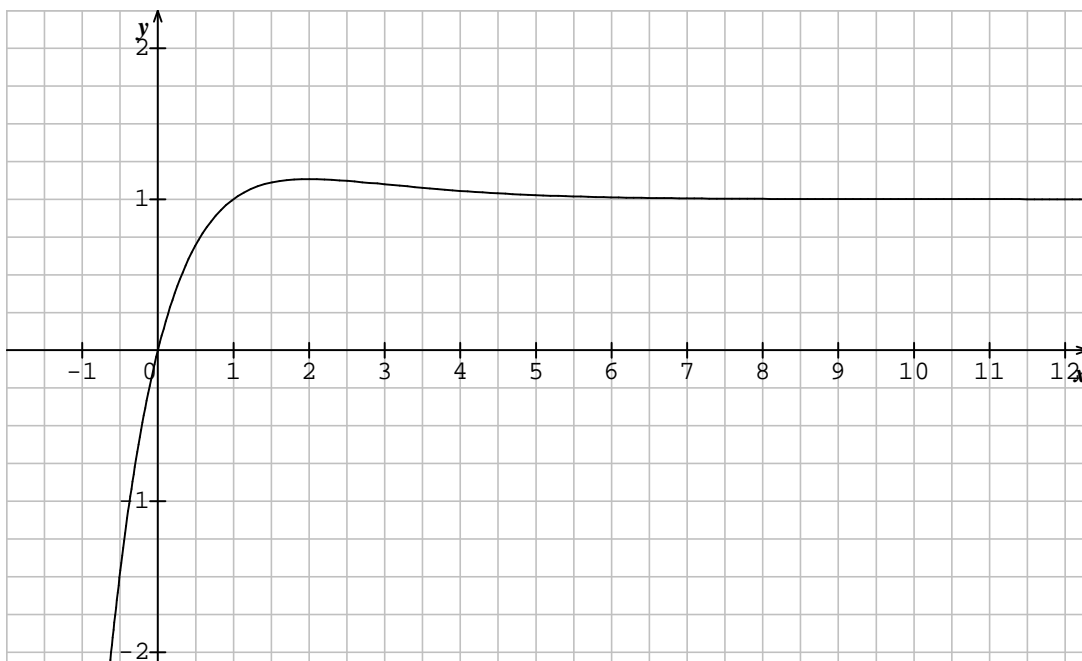
Or un nombre négatif ne peut pas être égal à un nombre positif, **la suite  $(u_n)$  n'est donc pas majorée.**

**d) La suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée donc d'après la démonstration de la partie A, la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$ .**



**Exercice 4 : Sur 5 points (commun à tous les candidats)****Partie A**

1.



$$2. a) g(2) = \int_0^2 f(t) dt$$

Sur  $[0 ; 2]$  la fonction  $f$  est positive, donc  $g(2)$  est l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) représentant  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 2$ .

b) Utilisons l'inégalité de la moyenne :

Sur  $[0, 2]$   $f$  est croissante donc  $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$   
soit  $0 \leq f(x) \leq 1 + e^{-2}$ .

Donc on a l'inégalité :  $0 \times (2 - 0) \leq \int_0^2 f(t) dt \leq (1 + e^{-2}) \times (2 - 0)$

Soit  $0 \leq g(2) \leq 2(1 + e^{-2})$   $2(1 + e^{-2}) \approx 2,27 \leq 2,5$ .

**Donc  $0 \leq g(2) \leq 2,5$ .**

3. a) Soit  $x$  un réel supérieur à 2.

Sur  $[2 ; +\infty[$ , On a  $1 \leq f(x) \leq 1 + e^{-2}$  donc  $f(x) \geq 1$ .

Par passage à l'intégrale  $\int_2^x f(t) dt \geq \int_2^x 1 dt$  ( $f$  est continue sur  $[2 ; +\infty[$ )

$$\int_2^x f(t) dt \geq [x]_2^x$$

$$\text{Soit } \int_2^x f(t) dt \geq x - 2$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \quad (\text{relation de Chasles})$$

Comme  $0 \leq \int_0^2 f(t) dt \leq 2,5$  alors  $\int_2^x f(t) dt \geq 0$ .

Donc  $g(x) \geq \int_2^x f(t) dt$  **Soit  $g(x) \geq x - 2$ .**

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$  donc par comparaison  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

4. Sur  $]-\infty ; +\infty[$  par  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$  donc  $g$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en 0.

Donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $g'(x) = f(x)$

D'après le tableau de variations de  $f$ , on en déduit que :

**Sur  $]-\infty ; 0[$   $f(x)$  est négative donc  $g$  est décroissante,**

**Sur  $]0 ; +\infty[$   $f(x)$  est positive donc  $g$  est croissante.**

### Partie B

1. Notons  $I = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt$

Posons  $u(x) = t-1$  et  $v'(x) = e^{-t}$   
 $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -e^{-t}$

Par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^x (t-1)e^{-t} dt &= \left[ (t-1)(-e^{-t}) \right]_0^x - \int_0^x 1 \times (-e^{-t}) dt \\ &= -(x-1)e^{-x} - e^0 + \int_0^x e^{-t} dt \\ &= (1-x)e^{-x} - 1 + \left[ -e^{-t} \right]_0^x \\ &= e^{-x} - xe^{-x} - 1 - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^x (t-1)e^{-t} dt = -xe^{-x}$$

2. Pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x ((t-1)e^{-t} + 1) dt$

Donc  $g(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt + \int_0^x 1 dt$

**Donc  $g(x) = -xe^{-x} + x = x(1 - e^{-x})$**

3.  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{cases}$  par composée  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

Donc par produit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$