

Exercice 1 : (3 points)

Commun à tous les candidats

$A(3 ; -2 ; 1)$

$B(5 ; 2 ; -3)$

$C(6 ; -2 ; -2)$

$D(4 ; 3 ; 2)$

1. – A, B et C sont alignés si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$$

$$\overrightarrow{AC} (x_C - x_A ; y_C - y_A ; z_C - z_A)$$

$$\overrightarrow{AB} (5 - 3 ; 2 + 2 ; -3 - 1)$$

$$\overrightarrow{AC} (6 - 3 ; -2 + 2 ; -2 - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} (2 ; 4 ; -4)$$

$$\overrightarrow{AC} (3 ; 0 ; -3)$$

Il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$, donc **les points A, B, C ne sont pas alignés.**

– Calcul de AB, AC et BC

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}$$

$$BC = \sqrt{(6 - 5)^2 + (-2 - 2)^2 + (-2 + 3)^2}$$

$$BC = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

On remarque que $AC = BC$, donc **ABC est isocèle en C**

- Montrons que ABC est rectangle en C

$$AB^2 = 6^2 = 36$$

$$AC^2 + BC^2 = \sqrt{18^2} + \sqrt{18^2} = 18 + 18 = 36$$

On a bien $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alors d'après la réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en C**

Conclusion : Le triangle ABC est isocèle et rectangle en C

2. a. Le vecteur $\vec{n} (2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) si il est orthogonal à 2 vecteurs du plan (ABC), par exemple \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

$$\overrightarrow{AB} (2 ; 4 ; -4) \text{ et } \overrightarrow{AC} (3 ; 0 ; -3)$$

$$\vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux si } \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 2 \times 2 + 4 \times 1 + 2 \times (-4) = 4 + 4 - 8 = 0,$$

donc \overrightarrow{AB} et \vec{n} sont orthogonaux

De même pour \vec{n} et \overrightarrow{AC}

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 3 \times 2 + 0 \times 1 - 3 \times 2 = 6 - 6 = 0$$

Donc \overrightarrow{AC} et \vec{n} sont orthogonaux

\vec{n} est bien orthogonal à 2 vecteurs du plan (ABC), donc $\vec{n} (2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

b. Une équation de plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$,

avec $\vec{n} (a, b, c)$ un vecteur normal du plan

D'après la question précédente, $\vec{n} (2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

donc (ABC) a comme équation : $2x + y + 2z + d = 0$

$A(3; -2; 1) \in (ABC)$, donc $3 \times 2 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 + d = 0$

$$6 - 2 + 2 + d = 0$$

$$d = -6$$

Une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z - 6 = 0$

$$\begin{aligned} \text{c. Par définition, } d(D, (ABC)) &= \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|2 \times 4 + 1 \times 3 + 2 \times 2 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|8 + 3 + 4 - 6|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

La distance du point D au plan (ABC) est bien égale à 3.

3. $V = \frac{1}{3} (\text{Aire de la base}) \times \text{hauteur}$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{BC \times AC}{2} \times d(D, (ABC))$$

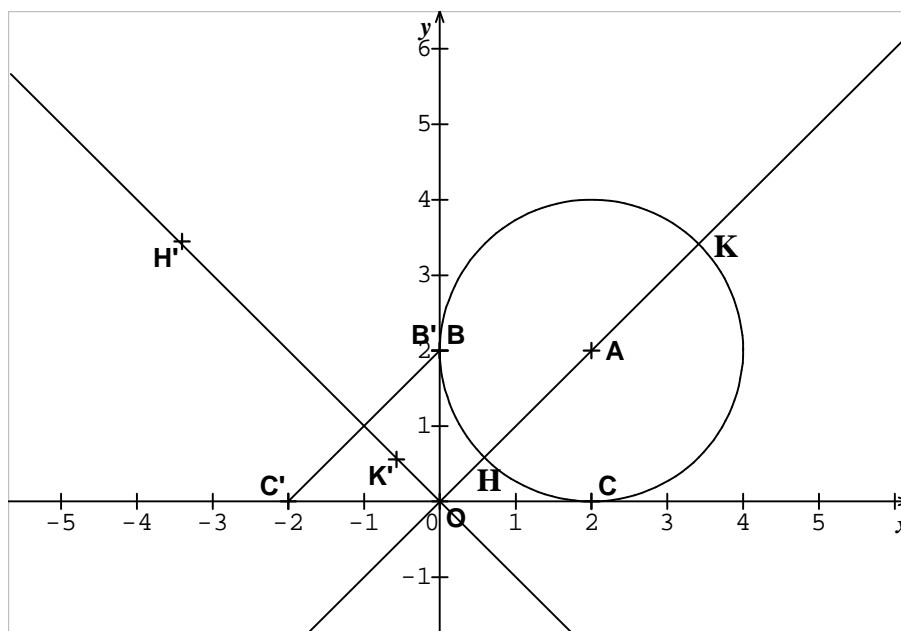
$$V = \frac{1}{6} \times \sqrt{18} \times \sqrt{18} \times 3$$

$$V = 9 \text{ UV}$$

Exercice 2 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a.



b. $OA = |z_A - z_O| = |2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$OH = OA - HA$$

Or HA est un rayon du cercle Γ , donc $HA = 2$

D'où $OH = 2\sqrt{2} - 2$

$$OK = OA + AK$$

Or AK est un rayon du cercle Γ , donc $AK = 2$

D'où $OK = 2\sqrt{2} + 2$

c. $z_{OA} = z_A = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + i \frac{2}{2\sqrt{2}} \right)$

$$\Leftrightarrow z_A = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_A = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

D'où $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4} = \arg(z_K) = \arg(z_H)$ (car H et K sont 2 points de la droite (OA))

Donc $z_K = (2\sqrt{2} + 2) e^{i\frac{\pi}{4}}$

et $z_H = (2\sqrt{2} - 2) e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. a. B' est l'image de B par f

Alors $z_{B'} = \frac{-4}{z_B}$

$$z_{B'} = \frac{-4}{2i}$$

$$z'_{B'} = \frac{-4i}{(-2)}$$

$$z'_{B'} = 2i$$

De même C' est l'image de C par f , donc $z'_{C'} = -2$

b. Un point est invariant par f s'il est confondu avec son image c'est-à-dire que $z' = z$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{z} = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (2i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2i)(z + 2i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i$$

On remarque que B et B' sont des points invariants par f , ainsi que le point d'affixe $-2i$.

$$\begin{aligned} 3. \quad \mathbf{a.} \quad OM \times OM' &= |z_M| \times |z_{M'}| \\ &= |z| \times |z'| \\ &= |zz'| \\ &= \left| z \times \frac{-4}{z} \right| \\ &= |-4| \end{aligned}$$

$$OM \times OM' = 4$$

$$\mathbf{b.} \text{ on sait que } z' = \frac{-4}{z}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \arg(z') &= \arg\left(\frac{-4}{z}\right) \\ &= \arg(-4) - \arg(z) \end{aligned}$$

$$\mathbf{\arg(z') = \pi - \arg(z)}$$

4. Soient K' et H' les images respectives de K et H par f .

a. On sait que $OM \times OM' = 4$.

K' étant l'image de K par f , alors $OK \times OK' = 4$

$$\Leftrightarrow OK' = \frac{4}{OK}$$

$$\Leftrightarrow OK' = \frac{4}{2\sqrt{2} + 2} = \frac{2 \times 2}{2(\sqrt{2} + 1)}$$

$$\Leftrightarrow OK' = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{OK' = 2(\sqrt{2} - 1) = OH}$$

H' étant l'image de H par f , alors $OH \times OH' = 4$

$$\Leftrightarrow OH' = \frac{4}{OH}$$

$$\Leftrightarrow OH' = \frac{4}{2\sqrt{2}-2}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{OH' = 2(\sqrt{2} + 1) = OK}$$

b. D'après 3b. $\arg(z') = \pi - \arg(z)$

$$\text{D'où} \quad \arg z_{K'} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = \arg z_{H'}$$

$$\text{Donc } z_{K'} = (2\sqrt{2}-2) e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ et } z_{H'} = (2\sqrt{2}+2) e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

c. Les points B' et C' étant placés, on trace le segment [B'C'].

On trace la médiatrice de [B'C'] au compas.

On prend au compas la longueur OH et on place K' sur la médiatrice de tel sorte que $OK' = OH$ (avec K' au dessus de l'axe des abscisses).

De même, on prend la mesure OK, et on place H' sur la médiatrice, de tel sorte que $OH' = OK$ (avec H' au dessus de l'axe des abscisses).

Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. À l'aide des transformations**a.**- s_1 Si s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B alors

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \alpha_1 \text{ et } AB = k_1 AM$$

ABM étant un triangle isocèle rectangle en M, alors $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AM^2 + MB^2$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 2AM^2$$

$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{2} AM$$

Donc s_1 est une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$

- s_2 Si s_2 est la similitude directe de centre O qui transforme B en N, alors

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) = \alpha_2 \text{ et } ON = k_2 OB$$

OBN étant un triangle isocèle rectangle en N, alors $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$

D'après le théorème de Pythagore, $OB^2 = NO^2 + NB^2$

$$\Leftrightarrow OB^2 = 2ON^2$$

$$\Leftrightarrow ON = \frac{\sqrt{2}}{2} OB$$

Donc s_2 est une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $r = s_2 \circ s_1$.

$$r(\mathbf{M}) = s_2 \circ s_1(\mathbf{M}) = s_2(\mathbf{B}) = \mathbf{N}$$

Donc l'image du point M par la transformation r est le point N.

$$r(\mathbf{I}) = s_2 \circ s_1(\mathbf{I}) = s_2(\mathbf{P}) = \mathbf{I}$$

Donc l'image du point I par la transformation r est le point I.

c. La composée de 2 similitude est une similitude de rapport k et d'angle α avec :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$k = k_1 \times k_2 = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

$k = 1$ donc r est une rotation.

r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre I car $r(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$.

d. $r(\mathbf{O}) = \mathbf{P}$

L'image du point O par r est P

e. $r(M) = N$ et $r(O) = P$

Donc $OM = PN$

r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{PN}) = \frac{\pi}{2}$

Donc les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

a. $(s_1) : z' - z_A = k e^{i\theta} (z - z_A)$

$$z' - 2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - 2)$$

$$z' = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z - 2) + 2$$

$$z' = (1 + i)(z - 2) + 2$$

$$(s_1) : z' = z(1 + i) - 2i$$

$$(s_2) : z' - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times (z - 0)$$

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z$$

$$(s_2) : z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{1}{2} \right) z$$

b. $s_1(M) = B$

Donc $z_B = z_M(1 + i) - 2i$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + i = z_M(1 + i) - 2i$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + i + 2i = z_M(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + 3i = z_M(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2} + 3i}{1 + i} = z_M$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3}{2} + 3i \right) (1 - i)}{1 + 1} = z_M$$

$$\Leftrightarrow z_M = \frac{9 + 3i}{4}$$

$$(s_2) : z_N = \left(\frac{1}{2} + i \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{3}{2} + i \right)$$

$$z_N = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{4}i - \frac{1}{2}$$

$$z_N = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$$

$$c. z_P = 1 - i$$

(OM) et (PN) sont perpendiculaires si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$

$$z_{\overrightarrow{OM}} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4}i$$

$$z_{\overrightarrow{PN}} = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i - 1 + i = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4}i$$

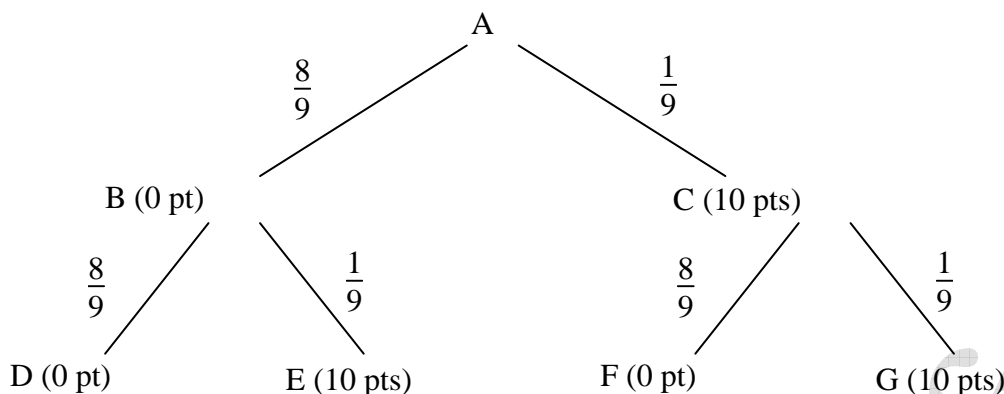
$$\text{Donc } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{PN} = \frac{9}{4} \times \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} \times \frac{9}{4} = 0$$

Les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires

www.2amath.fr

Exercice 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats



1. a. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie.

X peut prendre comme valeur : 0, 10 ou 20

$$P(X = 0) = P(B \cap D) = \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{64}{81}$$

$$P(X = 10) = P(B \cap E) + P(C \cap F) = \frac{8}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{81}$$

$$P(X = 20) = P(C \cap G) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$$

x_i	0	10	20
$P(X = x_i)$	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$

- b. Par définition, $E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i)$

$$E(X) = 0 \times \frac{64}{81} + 10 \times \frac{16}{81} + 20 \times \frac{1}{81}$$

$$E(X) = \frac{180}{81}$$

$$E(X) = \frac{20}{9}$$

- c. On cherche à calculer

$$P_{X=10}(C) = \frac{P(C \cap (X=10))}{P(X=10)}$$

$$P_{X=10}(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(X=10)}$$

$$P_{X=10}(C) = \frac{\frac{1}{9} \times \frac{8}{9}}{\frac{16}{81}}$$

$$P_{X=10}(C) = \frac{8}{81} \times \frac{81}{16}$$

$$P_{X=10}(C) = \frac{1}{2}$$

La probabilité que la bille ait suivie la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points est de $\frac{1}{2}$

2. Soit Y la variable aléatoire qui correspond au nombre de parties gagnées.

Y suit une loi binomiale de paramètres : $n = 8$ et $p = \frac{1}{81}$

$$\text{a. } P(Y = 2) = \binom{8}{2} \times \left(\frac{1}{81}\right)^2 \times \left(\frac{80}{81}\right)^6$$

$$P(Y = 2) = 28 \times \frac{80^6}{81^8}$$

$$P(Y = 2) = 3,96 \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{P(Y = 2) = 0,004}$$

La probabilité qu'il gagne exactement 2 parties est de 0,004

b. Calculons la probabilité de l'événement contraire à l'événement « il gagne au moins une partie » :

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0} \times \left(\frac{80}{81}\right)^8$$

$$P(Y = 0) = 0,905$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$\mathbf{P(Y \geq 1) = 0,095}$$

La probabilité qu'il gagne au moins une partie est 0,095.

Exercice 4 : (5 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x - 2 + x$.

$$1. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} -2 + x = -2 \end{array} \right\} \text{par somme, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + x = +\infty \end{array} \right\} \text{donc par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. f dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{x}$$

$x > 0$ donc étudier le signe de $f'(x)$, revient à étudier le signe de $1+x$

$$1+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Donc $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$, d'où f est **strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$**

Etablissons le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

3. f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$,

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $0 \in]-\infty ; +\infty[$

Donc, il existe une unique solution α telle que $f(\alpha) = 0$

D'après la calculatrice, $f(1,55) \approx -0,011$

$$f(1,56) \approx 4,6 \cdot 10^{-3}$$

D'où $1,55 < \alpha < 1,56$

PARTIE B

1. E est le point d'intersection entre la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2 - x$ et la courbe représentative de la fonction \ln . Donc pour déterminer E, il suffit de résoudre l'équation :

$$\ln x = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \ln x - 2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

Or $f(\alpha) = 0$

Donc E a pour coordonnées : **E(α ; $\ln \alpha$)**

2. Soit $I = \int_1^\alpha \ln x dx$.

a. Pour $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$.

I correspond donc à l'aire en unités d'aire, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses, en dessous de la courbe représentative de la fonction \ln et compris entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

b. $I = \int_1^\alpha \ln x dx$.

avec $u(x) = \ln x$ $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1$ $v(x) = x$

$$I = [x \times \ln x]_1^\alpha - \int_1^\alpha \left(\frac{1}{x} \times x\right) dx$$

$$I = \alpha \ln \alpha - 1 \times \ln 1 - \int_1^\alpha 1 dx$$

$$I = \alpha \ln \alpha - [x]_1^\alpha$$

$$I = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$$

c. On sait que $I = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$ et $f(\alpha) = \ln \alpha - 2 + \alpha = 0$ soit $\ln \alpha = 2 - \alpha$

$$\text{Alors } I = \alpha \left(\ln \alpha - 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$I = \alpha \left(2 - \alpha - 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$I = \alpha \left(1 - \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

$$I = -\alpha^2 + \alpha + 1$$

3. $A = \int_1^\alpha \ln x dx + \int_\alpha^2 (2-x) dx$

$$A = I + \int_\alpha^2 2 dx - \int_\alpha^2 x dx$$

$$A = -\alpha^2 + \alpha + 1 + [2x]_\alpha^2 - \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_\alpha^2$$

$$A = -\alpha^2 + \alpha + 1 + 4 - 2\alpha - 2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

$$A = -\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 3$$

Exercice 5 : (3 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Restitution organisée de connaissances :

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{e^h - e^0}{h - 0}$$

Or la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} , donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = \exp'(0) = e^0 = 1$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

2. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$ ($x \neq 0$)

Or d'après 1., $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

3. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (limite usuelle) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc par somme et quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n} \left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right].$$

1. $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}$ est la somme des n premiers d'une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$

Or la somme d'une suite géométrique a pour formule : $S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}$

$$\text{D'où } S_n = 1 \times \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$S_n = \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \text{ donc } f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$u_n = (1 - e) \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$u_n = -(1 - e) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = (e - 1) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. On sait que $u_n = (e - 1) f\left(\frac{1}{n}\right)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et d'après la Partie A, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Alors par produit et composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e - 1$

La suite (u_n) converge vers $e - 1$