Exercice 1 : (4 points)

1. Résolution de $z^2 - 6z + 13 = 0$:

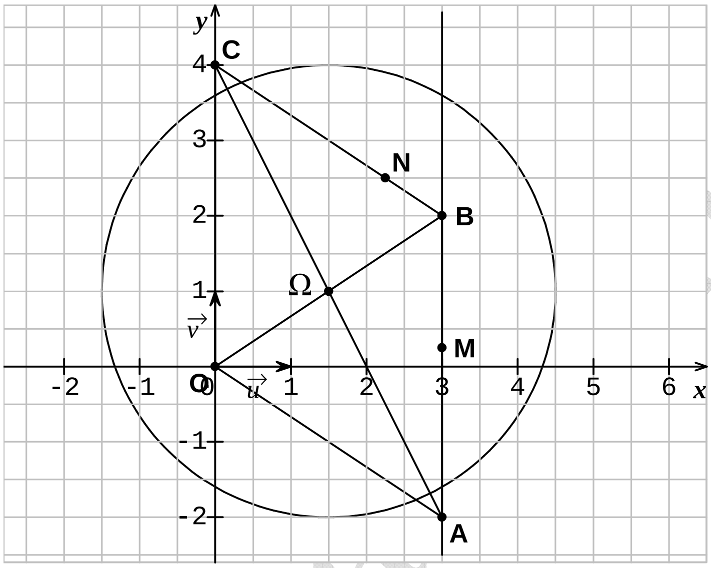
$\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 = (4i)^2$

2 solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{6-4i}{2} = 3 - 2i$ et $z_2 = 3 + 2i$.

Les solutions de l'équation sont : 3 – 2i et 3 + 2i.

2. Figure :



3. Affixe du vecteur $\overrightarrow{OA}$: $3 - 2i$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{CB}$: $b - c = 3 + 2i - 4i = 3 - 2i$

Donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

Le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

4. Le point Ω, centre du parallélogramme OABC est le milieu des diagonales [OB] et [AC].

Affixe de Ω : $\dfrac{z_O + z_B}{2} = \dfrac{3+2i}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2} + i}$

5. Le point Ω, centre du parallélogramme OABC est l'isobarycentre du système de points pondérés : {(O , 1), (A , 1),(B , 1),(C,1)}

Donc pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\,\overrightarrow{M\Omega}$

Pour tout points M du plan : $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12$

$\Leftrightarrow M\Omega = 3.$

L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ est donc le cercle de centre Ω et de rayon 3.

6. a) $a = 3 - 2i$ et $b = 3 + 2i$. Donc les points de la droite (AB) ont pour partie réelle 3.
L'affixe du point M est donc $z_M = 3 + i\beta$.

N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc :

$z_N - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega)$ donc $z_N = i(3 + i\beta - \frac{3}{2} - i) + \frac{3}{2} + i$

Soit $z_N = 3i - \beta - \frac{3}{2}i + 1 + \frac{3}{2} + i$

Soit $z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$

b) N appartient à la droite (BC) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

Affixe du vecteur $\overrightarrow{BN}$: $z_N - z_B = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 3 - 2i = -\frac{1}{2} - \beta + \frac{1}{2}i$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$: $z_C - z_B = 4i - 3 - 2i = -3 + 2i$

Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires si : $\left(-\frac{1}{2} - \beta\right) \times 2 - \frac{1}{2} \times (-3) = 0$

$-1 - 2\beta + \frac{3}{2} = 0$

$2\beta = \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{\beta = \frac{1}{4}}$

Donc pour que N appartienne à la droite (BC) il faut que β soit égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 2 : (Sur 4 points)

1. a) On a $\overrightarrow{AB}$: (– 1, – 1, 1) et $\overrightarrow{AC}$: (– 2, – 5, – 1).
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-1) + 1 \times 1 = 0$
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + (-1) \times (-5) + 1 \times (-1) = 0$
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux droites sécantes (en A) du plan (ABC), donc
$\overrightarrow{n}$ **est un vecteur normal au plan (ABC).**

c) $\overrightarrow{n}(2, -1, 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation du plan (ABC) est :
$2x - y + z + d = 0$ avec d réel.
Or $A \in$ (ABC) donc : $2 \times 1 - 1 \times 2 + 1 \times 3 + d = 0$ soit $d = -3$

Une équation du plan (ABC) est donc : $2x - y + z - 3 = 0$.

2. D(4, – 2, 5) $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} 4 = 2 - 2t \Leftrightarrow t = -1 \\ -2 = -1 + t \Leftrightarrow t = -1 \\ 5 = 4 - t \Leftrightarrow t = -1 \end{cases}$ Donc **le point D appartient à la droite (Δ).**

Un vecteur directeur de la droite (Δ) est $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées (– 2, 1 , – 1).
On a $\overrightarrow{n'} = -\overrightarrow{n}$ donc $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (Δ), par conséquent **elle est perpendiculaire au plan (ABC).**

3. E est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
Comme la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC), le point E est donc le point d'intersection entre la droite (Δ) et le plan (ABC).

Déterminons les coordonnées de E :

(ABC) : $\mathbf{2x - y + z - 3 = 0}$ et $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$

On résout : $2 \times (2 - 2t) - (-1 + t) + 4 - t - 3 = 0$ Soit $t = 1$
D'où les coordonnées de E : E (0, 0, 3).

Le centre de gravité du triangle ABC est l'isobarycentre du système de points pondérés :
{(A , 1),(B , 1),(C,1)}
Il a donc pour coordonnées : $\left(\frac{1 + 0 - 1}{3}, \frac{2 + 1 - 3}{3}, \frac{3 + 4 + 2}{3}\right)$ soit (0, 0, 3) c'est donc le point E

Le point E est donc le centre de gravité du triangle ABC.

<u>Exercice 3</u> : (5 points) (Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. **Proposition 1** : « La courbe représentative de *f* admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation y = 2x » **VRAI**

f est la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$,

donc $f(x) = C\,e^{-x} - \dfrac{2}{-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$f(x) = C\,e^{-x} + 2$

Or $f(\ln 2) = 1$ donc $f(\ln 2) = C\,e^{-\ln 2} + 2$

$1 = C\,e^{\ln (2^{-1})} + 2$

$1 = C\,2^{-1} + 2$

$-1 = C\,2^{-1}$

$-2 = C$

$f(x) = -2\,e^{-x} + 2$ et $f(0) = 0$ car $e^0 = 1$

$f'(x) = -2 \times (-1) \times e^{-x}$

$f'(x) = 2e^{-x}$ et $f'(0) = 2$

La tangente à la courbe représentative de *f* admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = 2x$.

2. **Proposition 2** : « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$ ». **FAUX**

<u>Contre-exemple</u> :

Soient *f* définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[2\,;+\infty[$ et g définie par $g(x) = x$ sur $[2\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $f(x)\,g(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 1$.

3. **Proposition 3** : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1g ». **FAUX**

On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute.
Sa masse initiale est de 10 kg.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et telle que u_n représente le poids en g de la glace au bout de n minutes.

On a $u_{n+1} = u_n - u_n \times \dfrac{10}{100}$

$u_{n+1} = u_n\,(1 - 0{,}1)$

$u_{n+1} = u_n \times 0{,}9$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 10\,000$ et de raison 0,9.

$u_n = 10\,000 \times 0{,}9^n$

$u_{70} = 10\,000 \times 0{,}9^{70}$

$u_{70} = 6{,}27$ à 10^{-2} près et $6{,}27 > 1$.

Autre méthode : voir page suivante

$$\begin{aligned} u_n < 1 &\Leftrightarrow 10\,000 \times 0{,}9^n < 1 \\ &\Leftrightarrow 0{,}9^n < \frac{1}{10000} \\ &\Leftrightarrow \ln(0{,}9^n) < -\ln 10000 \quad \text{car ln est croissante sur }]\,0\,;+\infty[\\ &\Leftrightarrow n > \frac{-\ln 10000}{\ln 0{,}9} \quad \text{car } \ln 0{,}9 < 0 \\ &\Leftrightarrow n > 87 \\ &\Leftrightarrow n \geq 88. \end{aligned}$$

Donc à partir de la quatre vingt huitième minute (et non 70), sa masse devient inférieure à 1g

4. **Proposition 4** : « Si A et B sont indépendants et si p(A) = p(B) = 0, 4 alors $p(A \cup B) = 0{,}8$ ». **FAUX**

Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω muni d'une probabilité p.

Alors $p(A \cap B) = p(A) \times P(B)$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}4$

$p(A \cup B) = 0{,}64$.

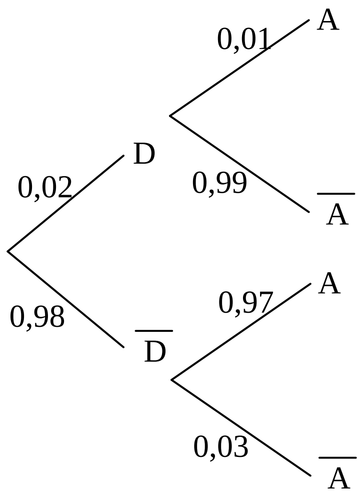
5. **Proposition 5** : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 ». **VRAI**

Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.

Soit D : l'événement « la pièce est défectueuse » et $\overline{D}$ l'événement contraire.

Soit A : l'événement « la pièce est acceptée » et $\overline{A}$ l'événement contraire.

Représentons la situation par un graphe :



D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. Appliquons la formule des probabilités totales :

$p(A) = p(A \cap D) + p(A \cap \overline{D})$

$p(A) = p_D(A) \times p(D) + p_{\overline{D}}(A) \times p(\overline{D})$

$p(A) = 0{,}01 \times 0{,}02 + 0{,}97 \times 0{,}98$

$p(A) = 0{,}9508$.

Exercice 3 : (5 points) (Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. **Proposition 1** : « Pour tout entier naturel n non nul, n et 2n + 1 sont premiers entre eux. »
VRAI

D'après le théorème de Bézout, n et 2n + 1 sont premiers entre eux si et seulement si il existe des entiers relatifs a et b tels que $a \times n + b \times (2n + 1) = 1$.

pour a = – 2 et b = 1 on trouve : $-2 \times n + 1 \times (2n + 1) = 1$
Donc il existe bien deux entiers relatifs a et b tel que $a \times n + b \times (2n + 1) = 1$, donc 2n+1 et n sont bien premiers entre eux.

2. **Proposition 2** : « $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (module 5). »
FAUX

Contre-exemple :
prenons x = 3
$3^2 + 3 + 3 = 15$
$3^2 + 3 + 3 \equiv 0$ (modulo 5)
mais x n'est pas congru à 1 (modulo 5).

3. **Proposition 3** : « Si N est divisible par 7 alors a + b est divisible par 7. » **VRAI**

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{aba7}$, alors N = 1000a + 100b + 10a + 7.

$1000 \equiv 6\ [7]$, $100 \equiv 2\ [7]$, $10 \equiv 3\ [7]$
$1000a + 100b + 10a + 7 \equiv 6a + 2b + 3a + 0\ [7]$
$1000a + 100b + 10a + 7 \equiv 9a + 2b\ [7]$
$1000a + 100b + 10a + 7 \equiv 2a + 2b\ [7]$
$1000a + 100b + 10a + 7 \equiv 2\,(a + b)\ [7]$

N est divisible par 7 $\Leftrightarrow N \equiv 0\ [7]$
$\Leftrightarrow 2\,(a + b) \equiv 0\ [7]$
2 est premier avec 7 (th de Gauss)
$\Leftrightarrow (a + b) \equiv 0\ [7]$
$\Leftrightarrow$ a + b divisible par 7.

4. **Proposition 4** : « La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de centre le point d'affixe 1 – i a pour écriture complexe $z' = (\sqrt{3} + i)z + \sqrt{3} - \sqrt{3}i$. » **FAUX**

La similitude a pour écriture complexe : $z' - (1 - i) = 2\,e^{i\,\pi/6}\,(z - (1 - i))$
$$z' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)(z - 1 + i) + 1 - i$$
$$z' = (\sqrt{3} + i)(z - 1 + i) + 1 - i$$
$$z' = (\sqrt{3} + i)z - \sqrt{3} + i \times \sqrt{3} - i + i^2 + 1 - i$$
$$z' = (\sqrt{3} + i)z + i\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2i$$

5. **Proposition 5 :** « L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels, » **VRAI**

Soit un point A d'affixe a et A' d'affixe $\overline{a}$.

On a $s(A) = A'$ et $s_A(A) = A$.

On sait que $s \circ s_A = s_A \circ s$ soit $s \circ s_A(A) = s(A) = \underline{A'}$

$s_A \circ s(A) = s_A(A') = \underline{A'}$ car $s \circ s_A = s_A \circ s$

Or s_A est une symétrie centrale donc s_A n'admet qu'un seul point fixe : A.

A' est donc confondus avec A et $a = \overline{a}$. a est donc un réel.

L'ensemble des nombres complexes a tels que $s \circ s_A = s_A \circ s$ est l'ensemble des nombres réels.

<u>Exercice 4 :</u> (7 points)

Partie A :

Restitution organisée de connaissances.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit f et g sont deux fonctions continues sur $[a , b]$ telles que pour tout réel x de $[a , b]$,
$f(x) \leq g(x)$

Donc on a pour tout réel x de $[a , b]$: $g(x) - f(x) \geq 0$

D'après la positivé de l'intégrale : $\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$

Par linéarité de l'intégrale on a $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$

Soit $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Partie B

1. Sur $[0, +\infty[$, la fonction f est dérivable par somme et composées de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$.

Pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $f'(x) = 1 + \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ Rappel : $(\ln u)' = u'/u$

$$= \frac{1 + e^{-x} - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Sur $[0, +\infty[$, e^{-x} est positif donc $f'(x)$ est positive.
Par conséquent f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Signe de $f(x)$:
Sur $[0, +\infty[$ $e^{-x} > 0$
donc $1 + e^{-x} > 1$
donc $\ln(1 + e^{-x}) > \ln 1$ car la fonction ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$
Donc $x + \ln(1 + e^{-x}) > x$
Et comme $x \geq 0$, par conséquent **$f(x)$ est positive sur $[0, +\infty[$.**

2. a) Pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}) = 1 \\ \lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ **La courbe C admet pour asymptote la droite D.**

b) Pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$
Précédemment on a montré que $\ln(1 + e^{-x}) > 0$
Donc sur $[0, +\infty[$: $f(x) - x > 0$
Donc la courbe C est au dessus de la droite D sur $[0 ; +\infty[$

3. a) Sur $[0 ; 1]$, $f(x) - x > 0$, donc l'intégrale I est égale à **l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C, la droite D et les droites d'équations x = 0 et x = 1.**

b) Soit la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(t) = \ln(1 + t) - t$
Sur $[0, +\infty[$, la fonction g est dérivable par somme et composées de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$.

Pour tout t de $[0, +\infty[$ on a : $g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1$

$$= \frac{1 - 1 - t}{1 + t}$$

$$= \frac{-t}{1+t}$$

Sur $[0, +\infty[$, $-t < 0$ et $1 + t > 0$ donc $g'(t) < 0$.
Donc sur $[0, +\infty[$, g est décroissante.
De plus $g(0) = \ln(1 + 0) - 0 = 0$.
Donc g admet un maximum nul en 0 donc pour tout réel $t \geq 0$, $g(t) \leq 0$.
Par conséquent pour tout réel $t \geq 0$, on a $\ln(1 + t) \leq t$.

c) Pour tout réel $t \geq 0$, on a $\ln(1 + t) \leq t$.
Pour tout réel $t \geq 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leq \ln(1 + t)$. (Résultat admis)
Donc pour tout réel $t \geq 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leq \ln(1 + t) \leq t$.
On a $e^{-x} > 0$ donc en posant $t = e^{-x}$ on obtient :
Pour tout réel $t \geq 0$, on a $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

d) Pour tout réel t ≥ 0, on a $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \leq \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

Par passage à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \leq \int_0^1 \ln\left(1+e^{-x}\right)dx \leq \int_0^1 e^{-x}dx$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx = \left[-\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]_0^1$$

$\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ est du type $\dfrac{-u'}{u}$ donc une primitive est – ln u

$$= -\ln(e^{-1}+1) + \ln(e^{0}+1)$$
$$= \ln 2 - \ln(e^{-1}+1)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)$$

$$\int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$$
$$= -e^{-1} + e^{0}$$
$$= 1 - e^{-1}.$$

Donc $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+e^{-x}\right)dx \leq 1-e^{-1}$

Donc $\boldsymbol{\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}.}$

e) $\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-1}}\right) = 0{,}3799$ $\quad 1 - e^{-1} = 0{,}63$

Donc un encadrement de I d'amplitude 0,4 est 0,3 < I < 0,7

4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à C et D.
Les coordonnées de M et N sont : M(x , *f*(x)) et N(x , x).

La distance MN vaut : $MN = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x)-x)^2}$
$= \sqrt{(\ln(1+e^{-x}))^2}$
$= (\ln(1+e^{-x}))$ car $\ln(1+e^{-x}) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$

M et N sont indiscernables si MN < 0,5 mm soit MN < 0,05 cm

Or 1 unité → 2 cm
x unités → 0,05 cm
soit x = 0,025 unités

MN < 0,05 cm $\Leftrightarrow \ln(1+e^{-x}) < 0{,}025$
$\Leftrightarrow 1 + e^{-x} < e^{0{,}025}$
$\Leftrightarrow e^{-x} < e^{0{,}025} - 1$
$\Leftrightarrow -x < \ln\left(e^{0{,}025}-1\right)$
$\Leftrightarrow x > -\ln\left(e^{0{,}025}-1\right)$ $\quad$ or $-\ln\left(e^{0{,}025}-1\right) \approx 3{,}68$

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables sur le graphique est l'intervalle $\boldsymbol{\left]-\ln\left(e^{0{,}025}-1\right);+\infty\right[}$