<u>Exercice 1 :</u> (5 points) *Commun à tous les candidats*

1) a) On répète 8 fois la même épreuve avec deux issues, soit le stylo présente un défaut dont la probabilité est 0,1 soit il n'en présente pas.

La variable X suit une loi binomiale de paramètres n = 8 et p = 0,1.

On a pour $k \in [0\ ,\ 8]$ $\quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

b) $P(A) = P(X = 0)$

$= \binom{8}{0} 0{,}1^0 \times 0{,}9^8$

$= 0{,}9^8$

P(A) = 0,43

$P(C) = P(X = 2)$

$P(C) = \binom{8}{2} 0{,}1^2 \times 0{,}9^6$

P(C) = 0,15

L'événement contraire de B est l'événement A

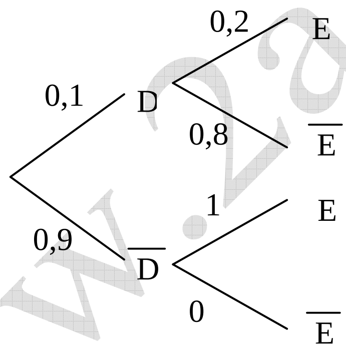
$P(B) = 1 - P(A)$

P(B) = 0,57

2) a) $P(D) = 0{,}1$ et $P(\overline{D}) = 0{,}9$

Le contrôle accepte tout les stylos sans défaut donc : $P_{\overline{D}}(E) = 1$ et $P_{\overline{D}}(\overline{E}) = 0$

Le contrôle accepte 20 % des stylos avec défaut donc $P_D(E) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$ et $P_D(\overline{E}) = 0{,}8$



b) La probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle est égale à P(E)

D et $\overline{D}$ forment une partition de l'ensemble des stylos, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(E) = P(E \cap D) + P(E \cap \overline{D})$

$= P(D) \times P_D(E) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(E)$

$= 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}9 \times 1$

P(E)= 0,92

c) La probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à :

$P_E(D) = \dfrac{P(E \cap D)}{P(E)}$

$P_E(D) = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}2}{0{,}92}$

$P_E(D)$ = 0,022 à 10^{-3} prés

3) On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

On répète 8 fois la même épreuve avec deux issues, soit le stylo présente un défaut dont la probabilité est : $P_E(D) = 0{,}022$ soit il n'en présente pas.

La variable Y suit une loi binomiale de paramètres n = 8 et p = 0,022.

$$P(Y = 0) = \binom{8}{0} 0{,}022^0 \times 0{,}978^8$$
$$= 0{,}978^8$$
$$\mathbf{= 0{,}84}$$

P(A) = 0,43 donc **P(Y = 0) ≈ 2P(A)**

Le contrôle est efficace puisque la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut a été doublée.

Exercice 2 (5 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. **f est définie sur]0 ; +∞[**

En effet : La fonction ln est définie sur]0 ; +∞[, donc le quotient de ln x par x² n'est défini que pour $x \in \,]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,dx = -\infty$;

En effet : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x)\,dx = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty$

donc par produit, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^2}dx = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\,dx = 0$

En effet : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\,dx = 0$

et d'après les croissances comparées des fonctions ln et identité :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = 0$

donc par produit, on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx = 0$

f est croissante sur]0 ; $e^{1/2}$] , est décroissante sur [$e^{1/2}$; +∞[et admet un maximum en $e^{1/2}$.

En effet : *f* est dérivable sur]0 ; +∞[comme quotient de fonctions dérivables sur]0 ; +∞[, et sa dérivée *f* ' est telle que :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x\,(1 - 2\ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{1/2}$

Or $x^3 > 0$ sur]0 ; +∞[, donc :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) > 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < e^{1/2}$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) < 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < e^{1/2}$

Donc sur]0; $e^{1/2}$[, $f'(x) > 0$ donc *f* est croissante

sur]$e^{1/2}$; + ∞[, $f'(x) < 0$ donc *f* est décroissante

$f'(e^{1/2}) = 0$ donc *f* admet un maximum en $e^{1/2}$

Le maximum de *f* est $\frac{1}{2e}$

En effet : *f* admet un maximum en $e^{1/2}$ et

$$f(e^{1/2}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2}$$

$$f(e^{1/2}) = \frac{\frac{1}{2}}{e^1}$$

$$f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e}$$

2. L'équation d'une tangente à (C) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Si elle passe par le point O, alors :

$$0 = f'(a)(-a) + f(a)$$

$$0 = \frac{1 - 2\ln(a)}{a^3}(-a) + \frac{\ln(a)}{a^2}$$

$$0 = \frac{-1 + 2\ln(a) + \ln(a)}{a^2}$$

$$0 = 3\ln(a) - 1$$

$$\ln(a) = \frac{1}{3}$$

$$a = e^{1/3}$$

Il existe donc une seule tangente à (C) passant par le point O : c'est la tangente au point d'abscisse $e^{1/3}$

Son équation est :

$$y = f'(e^{1/3})(x - e^{1/3}) + f(e^{1/3})$$

$$y = \frac{1 - 2\ln(e^{1/3})}{(e^{1/3})^3}(x - e^{1/3}) + \frac{\ln(e^{1/3})}{(e^{1/3})^2}$$

$$y = \frac{1}{3e}(x - e^{1/3}) + \frac{1}{3}e^{-2/3}$$

$$y = \frac{1}{3e}x - \frac{1}{3}e^{-2/3} + \frac{1}{3}e^{-2/3}$$

$$\mathbf{y = \frac{1}{3e}x}$$

Partie B

1. **a)** Soit F une primitive de *f*. On a alors :

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = F(x) - F(1)$$

$$g(x) = F(x) - F(1)$$

d'où : $g'(x) = F'(x)$

$$g'(x) = f(x)$$

Donc : ***f* est la dérivée de g**.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

D'après le tableau de variation de f, on en déduit que :
Sur]0 ; 1[, f est négative, donc **g est décroissante**
Sur]1 ; + ∞[, f est positive, donc **g est croissante**
f(1) = 0, donc **g admet un minimum en 1**

2. Sur [1 ; 3], f est positive, donc **g(3) est l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = 3.**

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{1/2} f(t)\,dt$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} (-f(t))\,dt$

Sur [1/2 ;1], *f* est négative, donc $g\left(\frac{1}{2}\right)$ **est l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = $\frac{1}{2}$ et x = 1.**

3. **a)** Posons : $u(t) = \ln t$ d'où : $u'(t) = \frac{1}{t}$

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ d'où : $v(t) = -\frac{1}{t}$

Par intégration par parties :

$g(x) = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}dt$

$g(x) = -\frac{\ln x}{x} + 0 - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x$

$g(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$

$\mathbf{g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ d'après les croissances compares des fonctions ln et identité

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 = 1$ c'est à dire : $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\,dx = 1}$

<u>Exercice 3</u> (5 points) *Commun à tous les candidats*

1) a) $u_1 = (1 + 2)u_0 + \frac{6}{1}$ soit $\mathbf{u_1 = 21}$

b) On a :

$d_0 = u_1 - u_0 = 16$ $d_1 = u_2 - u_1 = 24$ $d_2 = u_3 - u_2 = 32$ $d_3 = u_4 - u_3 = 40$
$d_4 = u_5 - u_4 = 48$ $d_5 = u_6 - u_5 = 56$ $d_6 = u_7 - u_6 = 64$ $d_7 = u_8 - u_7 = 72$
$d_8 = u_9 - u_8 = 80$ $d_9 = u_{10} - u_9 = 88$ $d_{10} = u_{11} - u_{10} = 96$

On passe d'un terme au suivant en ajoutant 8.
On peut donc conjecture que la suite d_n définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite arithmétique de premier terme $d_0 = 16$ et de raison 8.

2) v_n est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 16$ et de raison $r = 8$, donc on a pour tout n de $\mathbb{N}$: $\mathbf{v_n = 16 + 8n}$

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = \frac{(\text{premier terme + dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de terme})$$

$$S_n = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n$$

$$S_n = \frac{16 + 16 + 8(n-1)}{2} \times n$$

$S_n = (12 + 4n)n$ Soit $\mathbf{S_n = 4n^2 + 12n}$

3) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$
Au rang 0 : $u_0 = 5$ et $4 \times 0^2 + 12 \times + 5 = 5$. La propriété est vraie au rang 0.

Supposons à un rang n la propriété vraie : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$
Au rang n + 1 :

On a : $$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n + 1 + 2)(4n^2 + 12n + 5)}{n+1} + \frac{6}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+3)(4n^2 + 12n + 5)}{n+1} + \frac{6}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 5n + 12n^2 + 36n + 15 + 6}{n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1}$$

De plus : $4(n + 1)^2 + 12(n + 1) + 5 = 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 + 5 = 4n^2 + 20n + 21$
Et $(4n^2 + 20n + 21)(n + 1) = 4n^3 + 24n^2 + 41n + 21$

Donc $$u_{n+1} = \frac{(4n^2 + 20n + 21)(n+1)}{n+1}$$

$$u_{n+1} = 4n^2 + 20n + 21 = 4(n + 1)^2 + 12(n + 1) + 5$$

La propriété est donc vraie au rang n + 1.

La propriété est donc héréditaire et comme elle est vraie pour n = 0, elle est donc vraie pour tout n.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$

4) $d_n = u_{n+1} - u_n$

$d_n = 4(n + 1)^2 + 12(n + 1) + 5 - 4n^2 - 12n - 5$

$d_n = 4n^2 + 20n + 21 - 4n^2 - 12n - 5$

$d_n = 16 + 8n$

Donc la suite d_n définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite arithmétique de premier terme $d_0 = 16$ et de raison 8.

Exercice 4 : (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Soit (*C*) le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de (*C*) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) Soit z_B l'affixe du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

$z_B - z_O = e^{i2\pi/3}(z_A - z_O)$
$z_B = e^{i2\pi/3} e^{i\pi/3}$
$\mathbf{z_B = e^{i\pi}}$
$\mathbf{z_B = -1}$

Soit z_C l'affixe du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

$z_C - z_O = e^{i2\pi/3}(z_B - z_O)$
$z_C = e^{i2\pi/3} e^{i\pi}$
$\mathbf{z_C = e^{i5\pi/3}}$
$\mathbf{z_C = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

2) **a)** $z_A = e^{i\pi/3}$ donc : $|z_A| = 1$ donc : OA = 1
$z_B = e^{i\pi}$ donc : $|z_B| = 1$ donc : OB = 1
$z_C = e^{i5\pi/3}$ donc : $|z_C| = 1$ donc : OC = 1

On en déduit que A, B et C appartiennent au cercle (*C*) de centre O et de rayon 1.
(*C*) est le cercle circonscrit au triangle ABC.
Construction (voir graphique en fin d'exercice)

b) $AB = |z_B - z_A| = \left|-1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

AB = AC = BC donc : **ABC est un triangle équilatéral**

3) **a)** Construction (voir figure en fin d'exercice).

b) Les homothéties de rapport k multiplient les longueurs par $|k|$.
P, Q et R sont les images respectives des points A, B et C par h, donc :
PQ = 2AB ; PR = 2AC et QR = 2 BC
D'après **2)**, AB = AC = BC donc : PQ = PR = QR, d'où :
Le triangle PQR est un triangle équilatéral

4) **a)** Soit h l'homothétie de centre O et de rapport – 2.
Son écriture complexe est : $z' - z_O = -2(z - z_O)$
$\mathbf{z' = -2z}$

b) $z_A + z_B + z_C = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathbf{z_A + z_B + z_C = 0}$

D'où : $z_A = -z_B - z_C$

$z_A = \frac{-2z_B - 2z_C}{2}$

Or Q et R sont les images de B et C par h, donc : $z_Q = -2z_B$ et $z_R = -2z_C$

$z_A = \frac{z_Q + z_R}{2}$

Donc A est le milieu de [QR]

c) $OQ = |z_Q| = |-2z_B| = 2|z_B| = 2$

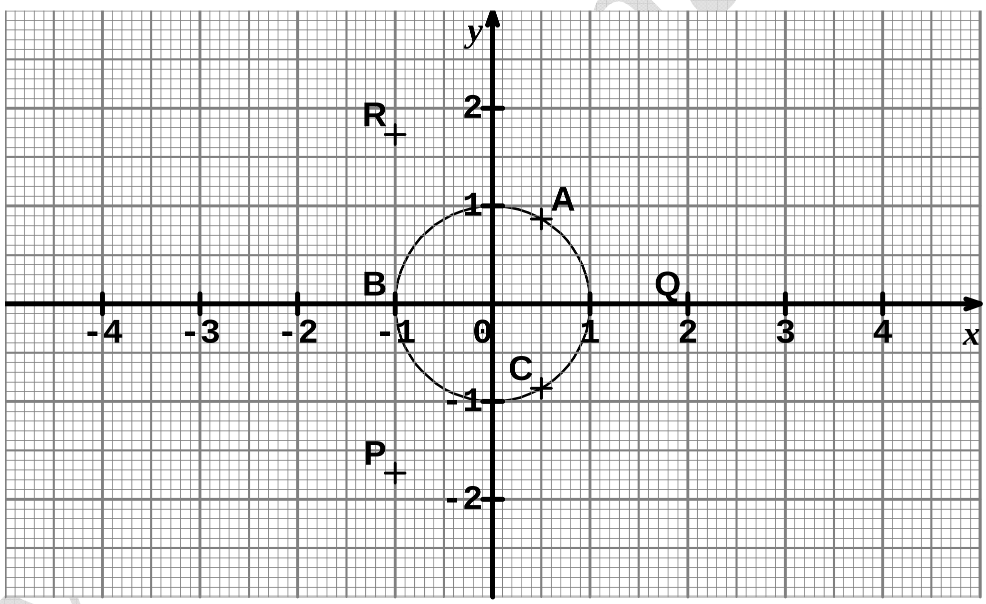
$OR = |z_R| = |-2z_C| = 2|z_C| = 2$

A est le milieu de [QR] et OQ = OR, donc (OA) est la médiatrice de (QR).

D'où (QR) est perpendiculaire à (OA) et de plus (QR) passe par A.

Or (*C*) passe par A et a pour centre O,

Donc **(QR) est tangente à (*C*) au point A**.



<u>Exercice 4</u> : (5 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = i$.

s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).

a) s_1 désigne une symétrie axiale, donc c'est une similitude indirecte de rapport 1, dont l' écriture complexe (qui associe à l'affixe z du point M l'affixe z' de son image M' par s_1) est de la forme :

$z' = a\,\overline{z} + b$ avec a complexe de module 1 et b complexe.

Or s_1 désigne la symétrie d'axe (AB), donc les points A et B sont invariants par s_1.

$$\begin{cases} 2 + i = a\,(2 - i) + b \\ 5 + 2i = a\,(5 - 2i) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 + i - a\,(2 - i) \\ 5 + 2i = a\,(5 - 2i) + 2 + i - a\,(2 - i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 + i - a\,(2 - i) \\ 3 + i = a\,(3 - i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{(3 + i)^2}{3^2 + 1^2} \\ b = 2 + i - a\,(2 - i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\,i \\ b = 2 + i - \left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\,i\right)(2 - i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\,i \\ b = 2 + i - \left(\dfrac{11}{5} + \dfrac{2}{5}\,i\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\,i \\ b = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}\,i \end{cases}$$

Donc s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :

$$\mathbf{z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\,i\right)\overline{z} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,i\right)}$$

b) Soit $z_{C'}$ l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).

$$z_{C'} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\,i\right)\overline{z_C} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,i\right)$$

$$z_{C'} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\,i\right)(-i) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,i\right)$$

$$z_{C'} = -\frac{4}{5}\,i + \frac{3}{5} - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,i$$

$$\mathbf{z_{C'} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,i}$$

c) Soit l'affixe de M : z = x + iy avec x et y réels

$z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)(x - iy) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right)$

$z' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5} + i\left(-\frac{4}{5}y + \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}\right)$

D'où z' est un imaginaire pur si et seulement si : $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{1}{5} = 0$

c'est à dire : $4x + 3y = 1$

L'**ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite (*D*) d'équation : 4x + 3y = 1.**

d) $z_{C'} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ d'après **b)**

Or : $4 \times \frac{2}{5} + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{5}$

$4 \times \frac{2}{5} + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 1$

Donc **C' appartient à (*D*).**

2) **a)** La droite (AB) a une équation de la forme : y = mx + p

A ∈ (AB) et B ∈ (AB), d'où : $\begin{cases} 1 = 2m + p \\ 2 = 5m + p \end{cases}$

$\begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ p = \frac{1}{3} \end{cases}$

D'où l'équation réduite de (AB) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

M(x ; y) ∈ (*D*) ∩ (AB) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ 4x + 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Les droites (*D*) et (AB) sont sécantes au point Ω d'affixe $\omega = \frac{1}{3}i$

b) s_1 et s_2 sont deux symétries axiales, donc deux similitudes indirectes de rapport 1.
Donc la composée *f* des deux est une similitude directe de rapport 1.
En effet,
La composée de deux similitudes est une similitude.
Une similitude indirecte inverse les angles, donc la composée de deux similitudes indirectes conserve les angles, donc c'est une similitude directe.

Une symétrie axiale conserve les longueurs (rapport 1), donc la composée de deux symétries axiales conserve aussi les longueurs.

c) L'image par s_1 de C est C'
et l'image de C' par s_2 est C' car C' appartient à la droite (*D*) d'après **1)d)**
Donc **C' = *f*(C)**
Ω appartient à (AB) et à (D), donc il est invariant par s_1 et par s_2.
Donc **$\Omega = f(\Omega)$**

d) *f* est une similitude directe de rapport 1 (d'après **b)**), donc c'est une rotation ou une translation.
De plus, elle admet un point invariant Ω, donc c'est une rotation de centre Ω.

3) a) On remarque que (1 ; – 1) est une solution particulière à l'équation $4x + 3y = 1$.
D'où : $4x + 3y = 4 \times 1 + 3 \times (-1)$
$4(x - 1) = 3(-y - 1)$
Or 4 et 3 sont premiers entre eux, donc : 4 divise $(-y - 1)$ et 3 divise $(x - 1)$
Il existe donc un entier k tel que : $-y - 1 = 4k$ et $x - 1 = 3k$
$y = -4k - 1$ et $x = 3k + 1$
Donc si (x ; y) est solution de l'équation, alors (x ; y) est de la forme :
$(3k + 1 ; -4k - 1)$ avec k entier relatif
Réciproquement, si k est un entier relatif, alors : $4(3k + 1) + 3(-4k - 1) = 1$
Donc les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation 4x + 3y = 1 sont les couples : (3k + 1 ; – 4k – 1) pour tout k entier relatif

b) Les points de (*D*) à coordonnées entières sont les points K de coordonnées $(3k + 1 ; -4k - 1)$ avec k entier relatif, d'après **a)**
$OK^2 = (3k + 1)^2 + (-4k - 1)^2$
$OK^2 = 25k^2 + 14k + 2$
$OK \leq 9 \Leftrightarrow 25k^2 + 14k + 2 \leq 81$
$\Leftrightarrow 25k^2 + 14k - 79 \leq 0$
Le discriminant du polynôme P tel que : $P(x) = 25x^2 + 14x - 79$ est :
$\Delta = 8096$
D'où les racines de P sont : $x_1 = \dfrac{-14 + 4\sqrt{506}}{50}$ et $x_2 = \dfrac{-14 - 4\sqrt{506}}{50}$
$x_1 \approx 1{,}52$ et $x_2 \approx -2{,}08$
et P est négatif sur $[\, x_1 ;\ x_2 \,]$
On en déduit que OK est inférieure à 9 pour k = – 2, k = – 1, k = 0 ou k = 1,
Les points de (*D*) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9 sont : $K_{-2}(-5 ; 7)$ $K_{-1}(-2 ; 3)$ $K_0(1 ; -1)$ et $K_1(4 ; -5)$