<u>Exercice 1 :</u> Sur 4 points *(commun à tous les candidats)*

PARTIE A :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

Au rang 0 : $u_0 = 13$ et $1 + \frac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13$ la propriété est vraie au rang 0.

Supposons à un rang n la propriété vraie : $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

Au rang n + 1 :

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5}$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5}$$
$$u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$

La propriété est donc vraie au rang n + 1.
La propriété est donc héréditaire et comme elle est vraie pour n = 0, elle est donc vraie pour tout n.

Donc pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

Variation de la suite u_n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{12}{5^{n+1}} - \frac{12}{5^n}$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{12}{5^n}\left(\frac{1}{5} - 1\right)$$
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5} \times \frac{12}{5^n}$$

Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite u_n est donc décroissante.

De plus pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$, donc u_n est minorée par 1.

La suite u_n étant décroissante et minorée, elle est donc convergente.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$**.**

2. a. Sens de variation de la suite (S_n) :

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$$
$$S_{n+1} - S_n = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}.$$

Donc pour tout entier naturel n, $S_{n+1} - S_n > 0$, **la suite S_n est croissante.**

b. Pour tout entier naturel n,

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$S_n = 1 + \frac{12}{5^0} + 1 + \frac{12}{5^1} + 1 + \frac{12}{5^2} + \ldots + 1 + \frac{12}{5^n}$

$S_n = (n + 1) \times 1 + \left(\frac{12}{5^0} + \frac{12}{5^1} + \frac{12}{5^2} + \ldots + \frac{12}{5^n}\right)$

$S_n = n + 1 + 12\left(\frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}\right)$

$\left(\frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}\right)$ est la somme des n + 1 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et premier terme 1 donc : $\left(\frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}\right) = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$

Donc $S_n = n + 1 + 15\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$

$S_n = n + 1 + 15 - \frac{15}{5^{n+1}}$

$\mathbf{S_n = n + 16 - \frac{3}{5^n}}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

PARTIE B :

Proposition 1 : **FAUX**
Contre exemple : la suite définie à la partie A. u_n converge et S_n diverge.

Proposition 2 : **FAUX**
Contre exemple : la suite définie à la partie A. u_n décroissante et S_n croissante.

Exercice 2 : Sur 5 points (*candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

PARTIE A :

1. on a : $11 = 3 \times 3 + 2$ donc $11 \equiv 2\ [3]$
$11 = 2 \times 5 + 1$ donc $11 \equiv 1\ [5]$

Donc 11 est solution de (S).

2. Soit n un entier relatif solution de (S) :
$n \equiv 2\ [3]$ et $11 \equiv 2\ [3]$ donc $n - 11 \equiv 0[3]$ et $n - 11 = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Donc si n est solution de (S) alors n − 11 est divisible par 3.

3. Soit n un entier relatif solution de (S) :
$n \equiv 1\ [5]$ et $11 \equiv 1\ [5]$ donc $n - 11 \equiv 0[5]$ et $n - 11 \equiv 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

Donc : $n = 3k + 11$ et $n = 5k' + 11$
Soit $3k = 5k'$
3 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de gauss, k divise 5 soit $k = 5K$
Donc $n = 15K + 11$

Donc les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme 11 + 15 k, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

1. On a $z' = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)z = e^{i\frac{\pi}{3}} z$.

Donc l'application *f* est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a $z'' = e^{i\frac{\pi}{5}} z$

Donc l'application g est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

2. a. $A_{n+1} = f(A_n)$ donc $OA_{n+1} = OA_n$ et $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{OA_n}\right) = \frac{\pi}{3}$
Le triangle OA_nA_{n+1} est donc équilatéral.

b. Les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 sont sur le cercle de centre O.
Les triangles OA_0A_1, OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5 sont équilatéraux.
Donc le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est un hexagone de centre O.

3. a. $B_{n+1} = g(B_n)$.
Comme g est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$, les points B_n sont sur le cercle de centre O et de rayon $OB_0 = \left| 4e^{-i\frac{\pi}{5}} \right| = 4$.

b. $(\overrightarrow{OB_n},\overrightarrow{OB_{n+2}}) = (\overrightarrow{OB_n},\overrightarrow{OB_{n+1}}) + (\overrightarrow{OB_{n+1}},\overrightarrow{OB_{n+2}})$

$(\overrightarrow{OB_n},\overrightarrow{OB_{n+2}}) = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\ [2\pi]$

$\boldsymbol{(\overrightarrow{OB_n},\overrightarrow{OB_{n+2}}) = \frac{2\pi}{5}\ [2\pi]}$

c. Les points B_n sont sur le cercle de centre O et de rayon 4.

Les triangles OB_nB_{n+2} sont isocèles avec un angle au sommet qui vaut $\frac{2\pi}{5}$

Donc le polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$ est un pentagone de centre O.

4. a. On a : $a_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{3}} a_n$ et $b_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{5}} b_n$

Donc a_n et b_n sont des suites géométriques de raison respectivement $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{5}}$

Donc $a_n = a_0 \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n$ et $b_n = b_0 \times \left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n$

$a_n = 2e^{i\frac{(n-2)\pi}{3}}$ et $b_n = 4e^{i\frac{(n-1)\pi}{5}}$

b. Les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont tels que : $\begin{cases} \frac{(n-2)\pi}{3} = 0[\pi] \\ \frac{(n-1)\pi}{5} = 0[\pi] \end{cases}$ soit $\begin{cases} n-2 \equiv 0[3] \\ n-1 \equiv 0\ [5] \end{cases}$ soit n solutions du système (S).

Exercice 3 : Sur 7 points (*Commun à tous les candidats*)

1. a. Limite de f en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} 4e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} (e^x + 3) = 3 \text{ donc par quotient } \lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x + 2) = -\infty$$

Donc par somme : $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

b. $f(x) - (x + 2) = -\dfrac{4e^x}{e^x + 3}$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$

La droite D_1 d'équation y = x + 2 est asymptote à la courbe C en $-\infty$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (x + 2) = -\dfrac{4e^x}{e^x + 3}$

Sur $\mathbb{R}$, e^x et $e^x + 3$ sont positif du fait que e^x est positif.
Donc sur $\mathbb{R}$: $f(x) - (x + 2) < 0$.
Sur $\mathbb{R}$, la courbe C est en dessous de la droite D_1.

2. a. Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - 4e^x \times e^x}{(e^x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + 3)^2 - 4e^{2x} - 12e^x + 4e^{2x}}{(e^x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 6e^{2x} + 9}{(e^x + 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2.}$$

b. Variations de f sur $\mathbb{R}$:

Un carré étant positif sur $\mathbb{R}$, on en déduit que sur $\mathbb{R}$ $\left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 \geq 0$, la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Limite de f en $+\infty$: $f(x) = x + 2 - \dfrac{4e^x}{e^x + 3}$

$= x + 2 - \dfrac{4}{1 + 3e^{-x}}$ (on met e^x en facteur et on simplifie)

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{1 + 3e^{-x}} = 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. On a $f\,'(\ln 3) = \left(\dfrac{3-3}{3+3}\right)^2 = 0$

Donc **la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse ln 3 est horizontale.**

b. L'équation de la tangente D_2 est $y = f(\ln 3)$.

Sur $]-\infty\,;\ln 3[$, f est croissante donc $f(x) < f(\ln 3)$
Sur $]\ln 3\,;+\infty[$, f est croissante donc $f(\ln 3) < f(x)$
On en déduit alors que :
Sur $]-\infty\,;\ln 3[$, la courbe C est au dessous de la tangente D_2.
Sur $]\ln 3\,;+\infty[$, la courbe C est au dessus de la tangente D_2.
Pour x = ln 3, la courbe C et la tangente D_2 se coupent.

4. a. La tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y = f\,'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = \left(\dfrac{-2}{4}\right)^2 x + 2 - \dfrac{4}{4}$

$y = \dfrac{1}{4}x + 1$

La tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

b. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f\,'(x) - \dfrac{1}{4}$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(x) = f\,''(x)$

$= 2 \times \dfrac{e^x(e^x+3) - e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^2} \times \dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}$

$= \dfrac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}$.

Sur $\mathbb{R}$, $g''(x)$ a le même signe que $e^x - 3$. (car $e^x > 0$ et $e^x + 3 > 0$).

Donc
Sur $]-\infty\,;\ln 3[$, $g''(x) < 0$, donc g' est décroissante
Sur $]\ln 3\,;+\infty[$, $g''(x) > 0$, donc g' est croissante
Pour x = ln 3, $g''(x) = 0$, donc g' admet un minimum en ln 3 qui vaut : $f\,'(\ln 3) - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

De plus pour x = 0, g’(0) = f ’(0) – $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{4}$ – $\frac{1}{4}$ = 0

x	$-\infty$		0		ln 3		$+\infty$
g''		–	|	–	|	+	
$g'(x)$		↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

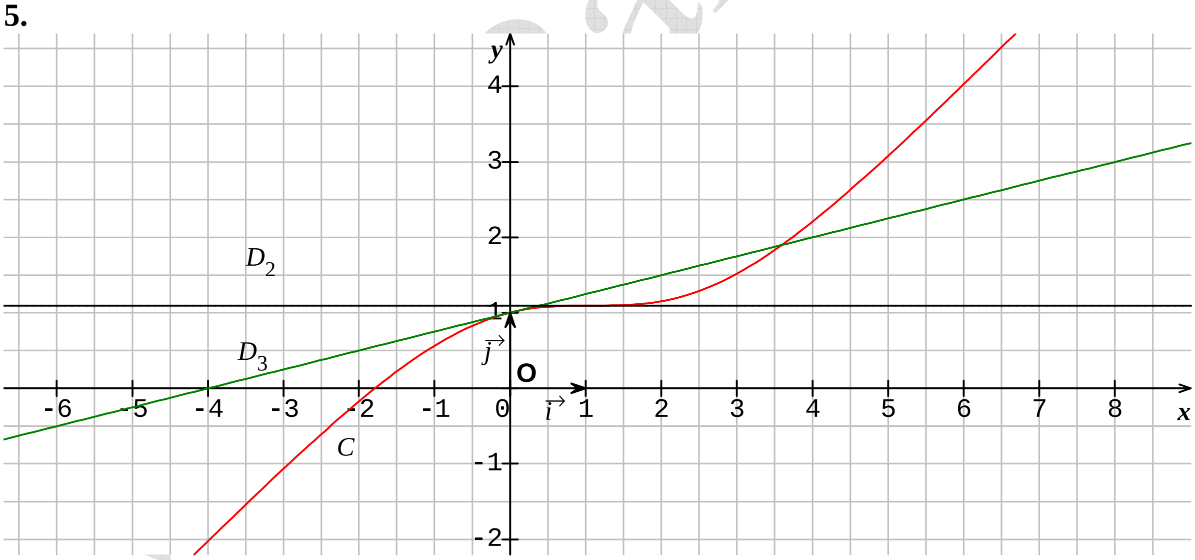
On en déduit donc que :
Sur]– ∞ ; 0[, g’(x) > 0 donc g est croissante
Sur]0 ; ln 3[, g’(x) < 0 donc g est décroissante
Pour x = 0, g admet un maximum qui vaut : g(0) = f(0) – 1 = 2 – $\frac{4}{4}$ – 1= 0

x	$-\infty$		0		ln3
g'		+	|	–	
g(x)		↗	0	↘	

Par conséquent, la fonction g est négative sur]– ∞ ; ln 3[.

Donc sur] – ∞ ; ln 3], f(x) – $\left(\frac{1}{4}x + 1\right)$ ≤ 0, la courbe C est au dessous de la tangente D_3.

5.



6. a. La fonction g définie sur ℝ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 3}$ est du type $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = e^x + 3$

Une primitive G de g sur ℝ est donc ln u.

$$\mathbf{G(x) = \ln (e^x + 3)}$$

b. Soit λ un réel strictement négatif.
On sait que sur ℝ, $f(x) - (x + 2) < 0$, donc l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par D_1, C et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$ est égale à :

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} \left((x+2) - f(x)\right) dx$$
$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} \frac{4e^x}{e^{x+3}} dx$$
$$A(\lambda) = \left[4G(x)\right]_{\lambda}^{0}$$
$$\mathbf{A(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln (e^{\lambda} + 3)}$$

c. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^{\lambda} = 0$ donc $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \ln (e^{\lambda} + 3) = 4 \ln 3$

Donc $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln 3 = \mathbf{4 \ln \left(\frac{4}{3}\right)}$

<u>Exercice 4</u> : Sur 4 points (*Commun à tous les candidats*)

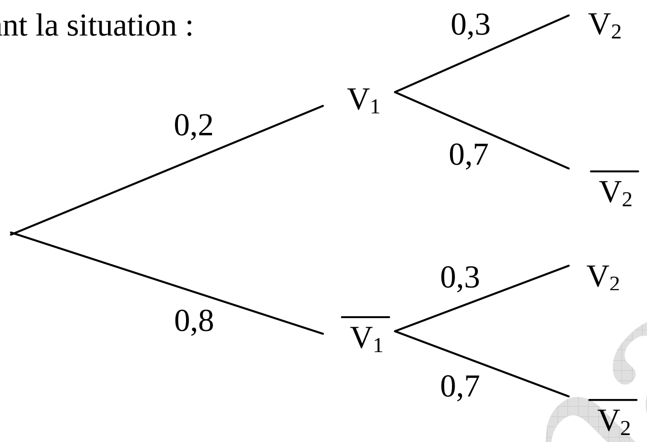
1. L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges

donc $P(V_1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ et $P(\overline{V_1}) = 1 - P(V_1) = 0{,}8$

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges

donc $P(V_2) = \frac{3}{10} = 0{,}3$ et $P(\overline{V_2}) = 1 - P(V_2) = 0{,}7$

Arbre traduisant la situation :



La probabilité de gagner un lecteur MP3 est égale à :

$p = P(V_1 \cap V_2) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$.

2. La probabilité de gagner un ours en peluche est égale à :

$$P(V_1 \cap \overline{V_2}) + P(\overline{V_1} \cap V_2) = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}3$$
$$= 0{,}38$$

La probabilité de gagner un ours en peluche est de 0,38.

3. On définit une variable aléatoire X égale au nombre de personne qui gagnent un lecteur MP3.
On répète 20 fois la même épreuve avec deux issues, soit on gagne un lecteur MP3 dont la probabilité est 0,06 soit on ne gagne pas de lecteur MP3

La variable X suit une loi binomiale de paramètres n = 20 et p = 0,06.

On a pour $k \in [0\ ,\ 20]$ $\quad P(X = k) = \binom{20}{k} 0{,}06^k (1 - 0{,}06)^{20 - k}$

$$P(X = 2) = \binom{20}{2} \times 0{,}06^2 \times 0{,}94^{18}$$

$$P(X = 2) = 0{,}2246$$

La probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3 est égale à 0,2246 à 10^{-4} près.

4. L'événement contraire de l'événement « l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3 » est l'événement « aucun de ces personnes gagne un lecteur MP3 » donc la probabilité est $0,94^n$.

Donc la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3 est :

$$p_n = 1 - 0,94^n$$

$p_n \geq 0,99 \iff 1 - 0,94^n \geq 0,99$

$p_n \geq 0,99 \iff - 0,94^n \geq - 0,01$

$p_n \geq 0,99 \iff 0,94^n \leq 0,01$

$p_n \geq 0,99 \iff n \ln 0,94 \leq \ln 0,01$ car ln x est croissante sur $]0 ; +\infty[$ et car $\ln a^n = n \ln a$

$p_n \geq 0,99 \iff n \geq \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,94}$ car $\ln 0,94 < 0$

$p_n \geq 0,99 \iff n \geq 74,42$ car $\ln 0,94 < 0$

Donc la plus petite valeur de n vérifiant $p_n > 0,99$ est 75.