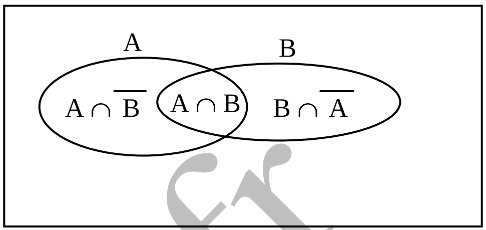
<u>Exercice 1 :</u> (5 points) *Commun à tous les candidats*

1. Restitution organisée des connaissances

a) Soient A et B deux évènements associés pour une expérience aléatoire.

Dans B et pas dans A : $B \cap \overline{A}$

Dans B et dans A : $B \cap A$



$B \cap \overline{A}$ et $B \cap A$ sont incompatibles et $(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A) = B$

Donc $p(B) = p((B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A))$

Soit $\mathbf{p(B) = p(B \cap \overline{A}) + p(B \cap A)}$

b) Soit deux évènements A et B indépendants pour la probabilité p

On a : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Or : $p(B) = p(B \cap \overline{A}) + p(B \cap A)$

Donc $p(B) = p(B \cap \overline{A}) + p(A) \times p(B)$

Soit $p(B \cap \overline{A}) = p(B)(1 - p(A))$

Soit $p(B \cap \overline{A}) = p(B) \times p(\overline{A})$

Donc les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants pour la probabilité p.

Si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. a) La probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne est égale à : $p(\overline{R} \cap S)$.

R et S sont indépendants, donc $\overline{R}$ et S le sont aussi d'après la question 1.b).

Ainsi : $p(\overline{R} \cap S) = p(\overline{R}) \times p(S)$

$p(\overline{R} \cap S) = (1 - p(R)) \times p(S)$

$p(\overline{R} \cap S) = (1 - 0{,}1) \times 0{,}05$

$\mathbf{p(\overline{R} \cap S) = 0{,}045}$

b) Lorsqu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.
Donc pour que Stéphane soit à l'heure il faut qu'aucun des deux évènements se produisent.
La probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné est donc égale à :

$$p(\overline{R} \cap \overline{S})$$

On a $p(\overline{R}) = p(\overline{R} \cap S) + p(\overline{R} \cap \overline{S})$ d'après la question 1.a).

Donc $p(\overline{R} \cap \overline{S}) = p(\overline{R}) - p(\overline{R} \cap S)$

$$p(\overline{R} \cap \overline{S}) = 0{,}9 - 0{,}045$$

$$p(\overline{R} \cap \overline{S}) = 0{,}855$$

La probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné est 0,855.

c) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de fois où Stéphane entend le réveil au cours d'une semaine.
X suit une loi binomiale de paramètres n = 5 et p = 1 – p(R) = 0,9

La probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine est égale à : P(X = 4) + P(X = 5).

$$P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \times 0{,}9^4 \times 0{,}1^1 + \binom{5}{5} \times 0{,}9^5 \times 0{,}1^0$$

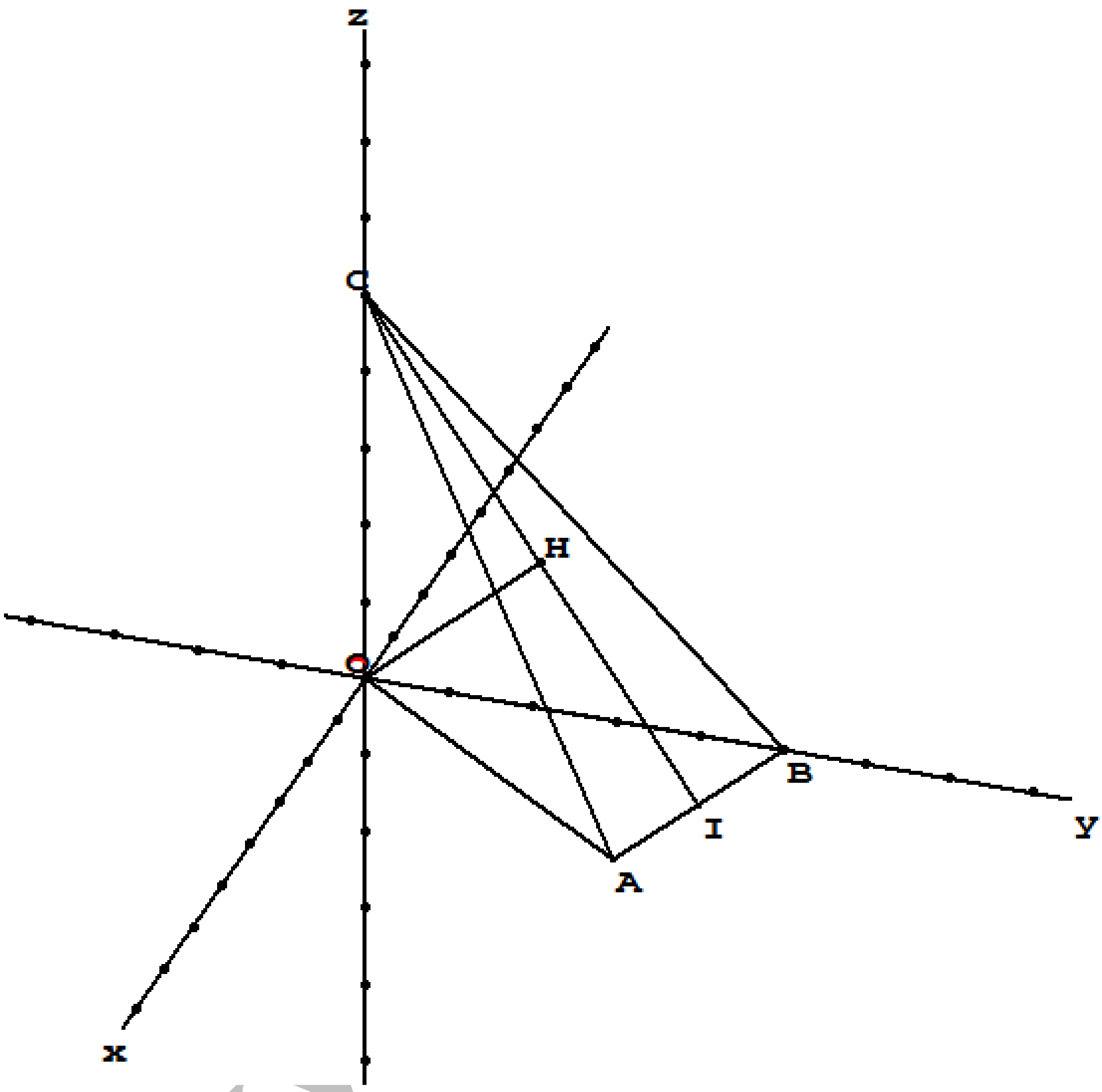
$$P(X = 4) + P(X = 5) = 5 \times 0{,}9^4 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}9^5$$

$$P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}9185$$

La probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine est 0,9185 à la quatrième décimale.

<u>Exercice 2 :</u> (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1.



2. $\overrightarrow{OA}$ (3, 4, 0) $\overrightarrow{OC}$ (0, 0, 5)

$OA = \sqrt{9 + 16 + 0} = 5$ $OC = \sqrt{0 + 0 + 25} = 5$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 3 \times 0 + 4 \times 0 + 0 \times 5 = 0$

Donc le triangle OAC est rectangle et isocèle en O.

$\overrightarrow{OB}$ (0 , 5, 0) $\overrightarrow{OC}$ (0, 0, 5)

$OB = \sqrt{0 + 25 + 0} = 5$ $OC = 5$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0 \times 0 + 5 \times 0 + 0 \times 5 = 0$

Donc le triangle OBC est rectangle et isocèle en O.

$AB = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}$

$AC = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{0 + 25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Donc AC = BC, **le triangle ABC est isocèle en C.**

3. a) I est le milieu du segment $[AB]$ donc ses coordonnées sont : $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$

Coordonnées de :

$$\overrightarrow{HC}\left(0-\frac{15}{19}, 0-\frac{45}{19}, 5-\frac{45}{19}\right) \text{ soit } \overrightarrow{HC}\left(-\frac{15}{19}, -\frac{45}{19}, \frac{50}{19}\right)$$

$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{3}{2}-\frac{15}{19}, \frac{9}{2}-\frac{45}{19}, 0-\frac{45}{19}\right) \text{ soit } \overrightarrow{HI}\left(\frac{27}{38}, \frac{81}{38}, -\frac{45}{19}\right)$$

On a $-\dfrac{\frac{15}{19}}{\frac{27}{38}} = -\dfrac{10}{9}$ $\qquad -\dfrac{\frac{45}{19}}{\frac{81}{38}} = -\dfrac{10}{9}$ $\qquad -\dfrac{\frac{50}{19}}{\frac{45}{19}} = -\dfrac{10}{9}$

Donc $\overrightarrow{HC} = -\frac{10}{9}\overrightarrow{HI}$

Les vecteurs $\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HI}$ sont donc colinéaires, **les points H, C, I sont donc alignés.**

b) I est le milieu du segment $[AB]$ donc I appartient au plan (ABC)
Les points H, C, I sont alignés, C et I sont dans le plan (ABC) donc H appartient aussi au plan (ABC).

$$\overrightarrow{OH}\left(\frac{15}{19}, \frac{45}{19}, \frac{45}{19}\right) \qquad \overrightarrow{CA}\ (3, 4, -5)$$

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CA} = 3\times\frac{15}{19} + 4\times\frac{45}{19} - 5\times\frac{45}{19} = 0$$

$$\overrightarrow{OH}\left(\frac{15}{19}, \frac{45}{19}, \frac{45}{19}\right) \qquad \overrightarrow{CB}\ (0, 5, -5)$$

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{CB} = 0\times\frac{15}{19} + 5\times\frac{45}{19} - 5\times\frac{45}{19} = 0$$

$\overrightarrow{OH}$ est donc orthogonal à deux droites sécantes du plan (ABC), $\overrightarrow{OH}$ est donc orthogonal au plan (ABC).
Comme H appartient au plan (ABC), **H est donc le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC)**

c) $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal au plan (ABC) c'est donc un vecteur normal au plan (ABC).

Une équation cartésienne du plan ABC est donc : $\frac{15}{19}x + \frac{45}{19}y + \frac{45}{19}z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or $C \in (ABC)$ donc : $0 + 0 + \frac{45}{19}\times 5 + d = 0$ soit $d = -\frac{225}{19}$.

Une équation cartésienne du plan ABC est donc : $\frac{15}{19}x + \frac{45}{19}y + \frac{45}{19}z - \frac{225}{19} = 0$ soit encore en simplifiant par $\frac{15}{19}$: $\quad \mathbf{x + 3y + 3z - 15 = 0}$

4. a) Le triangle OAC est isocèle en O donc OA = OC.
Le triangle OBC est isocèle en O donc OB = OC.
Donc OA = OB. Le triangle OAB est isocèle en O.
I est le milieu de [AB] et comme OAB est isocèle en O, donc la droite [OI] est la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

Aire du triangle OAB : $A_{OAB} = \dfrac{OI \times AB}{2}$

$AB = \sqrt{10}$ $\quad OI = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{81}{4} + 0} = \sqrt{\dfrac{90}{4}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{10}$

Donc $\mathbf{A_{OAB} = \dfrac{30}{4} = \dfrac{15}{2}}$

Volume du tétraèdre OABC :
Le triangle OAC est rectangle en O donc (OC) est orthogonal à (OA).
Le triangle OBC est rectangle en O donc (OC) est orthogonal à (OB).
Les droites (OA) et (OB) sont sécantes, donc la droite (OC) est orthogonal au plan (OAB).
Pour le tétraèdre OABC, (OC) est donc la hauteur relative à la base OAB.

Donc : $V_{OABC} = \dfrac{1}{3} \times A_{OAB} \times OC$

$V_{OABC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{15}{2} \times 5$

$\mathbf{V_{OABC} = \dfrac{25}{2}}$

b) H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC), donc la distance du point O au plan (ABC) est égale à la distance OH.

$$\mathbf{OH} = \sqrt{\left(\frac{15}{19}\right)^2 + \left(\frac{45}{19}\right)^2 + \left(\frac{45}{19}\right)^2} = \sqrt{\frac{4275}{19^2}} = \mathbf{\frac{15}{19}\sqrt{19}}$$

c) Pour le tétraèdre OABC, (OH) est donc la hauteur relative à la base ABC.

Donc : $V_{OABC} = \dfrac{1}{3} \times A_{ABC} \times OH$

Soit : $A_{ABC} = \dfrac{3V_{OABC}}{OH}$

$A_{ABC} = \dfrac{\frac{75}{2}}{\frac{15}{19}\sqrt{19}}$

$A_{ABC} = \dfrac{75}{2} \times \dfrac{19}{15} \times \dfrac{1}{\sqrt{19}}$

$A_{ABC} = \dfrac{15 \times 5}{2} \times \dfrac{19}{15} \times \dfrac{\sqrt{19}}{19}$

$\mathbf{A_{ABC} = \dfrac{5}{2}\sqrt{19}}$

Exercice 2 : **(5 points)** *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. On donne (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.

a) $3 \times 9 = 27$ donc $3 \times 9 + 2 \times 1 = 29$
Un couple d'entiers solution de l'équation (E) est (9 ; 1).

b) Soient (x , y) un couple d'entiers relatifs solution de (E).

$3x + 2y = 29$
$3x + 2y = 3 \times 9 + 2 \times 1$
$3(x - 9) = 2(1 - y)$

Or 3 et 2 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :
3 divise $(1 - y)$ et 2 divise $(x - 9)$

Il existe donc un entier relatif k tel que : $1 - y = 3k$ et $x - 9 = 2k$
$y = 1 - 3k$ et $x = 2k + 9$

On a démontrer que si (x , y) un couple d'entiers relatifs est solution de (E) alors il existe un entier relatif k tel que $x = 2k + 9$ et $y = 1 - 3k$.

Réciproquement : pour tout entier relatif k, le couple $(2k + 9 ; 1 - 3k)$ est solution de (E).
En effet : $3 \times (2k + 9) + 2 \times (1 - 3k) = 6k + 27 + 2 - 6k = 29$.

Conclusion : L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) est :
$$\{ (2k + 9 ; 1 - 3k) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

c) On cherche les couples (x ; y) d'entiers relatifs solutions de (E) tel que $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
On cherche donc les entiers relatifs k tel que $2k + 9 \geq 0$ et $1 - 3k \geq 0$

$2k \geq -9$ $\qquad 1 \geq 3k$

$k \geq -4{,}5$ $\qquad \frac{1}{3} \geq k$

$k \geq -4$ $\qquad 0 \geq k$

k peut donc prendre les valeurs -4 ; -3 ; -2 ; -1 et 0.
Ce qui correspond aux couples : (1 ; 13) ; (3 ; 10) ; (5 ; 7) ; (7 ; 4) et (9 ; 1).

Les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ sont :
(1 ; 13) ; (3 ; 10) ; (5 ; 7) ; (7 ; 4) et (9 ; 1)

2. **a)** Le plan P a pour équation $3x + 2y = 29$. Il a donc pour vecteur normal : $\vec{n}\,(3 ; 2 ; 0)$.

L'axe (Oz) a pour vecteur directeur $\vec{k}\,(0 ; 0; 1)$.

$\vec{k}.\vec{n} = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux.

Le vecteur normal à P est orthogonal à $\vec{k}$ donc **P est parallèle à l'axe (Oz).**

b) Intersection M(x ; y ; z) de P et (Ox) :

Les coordonnées de M vérifie : $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ soit $x = \dfrac{29}{3}$

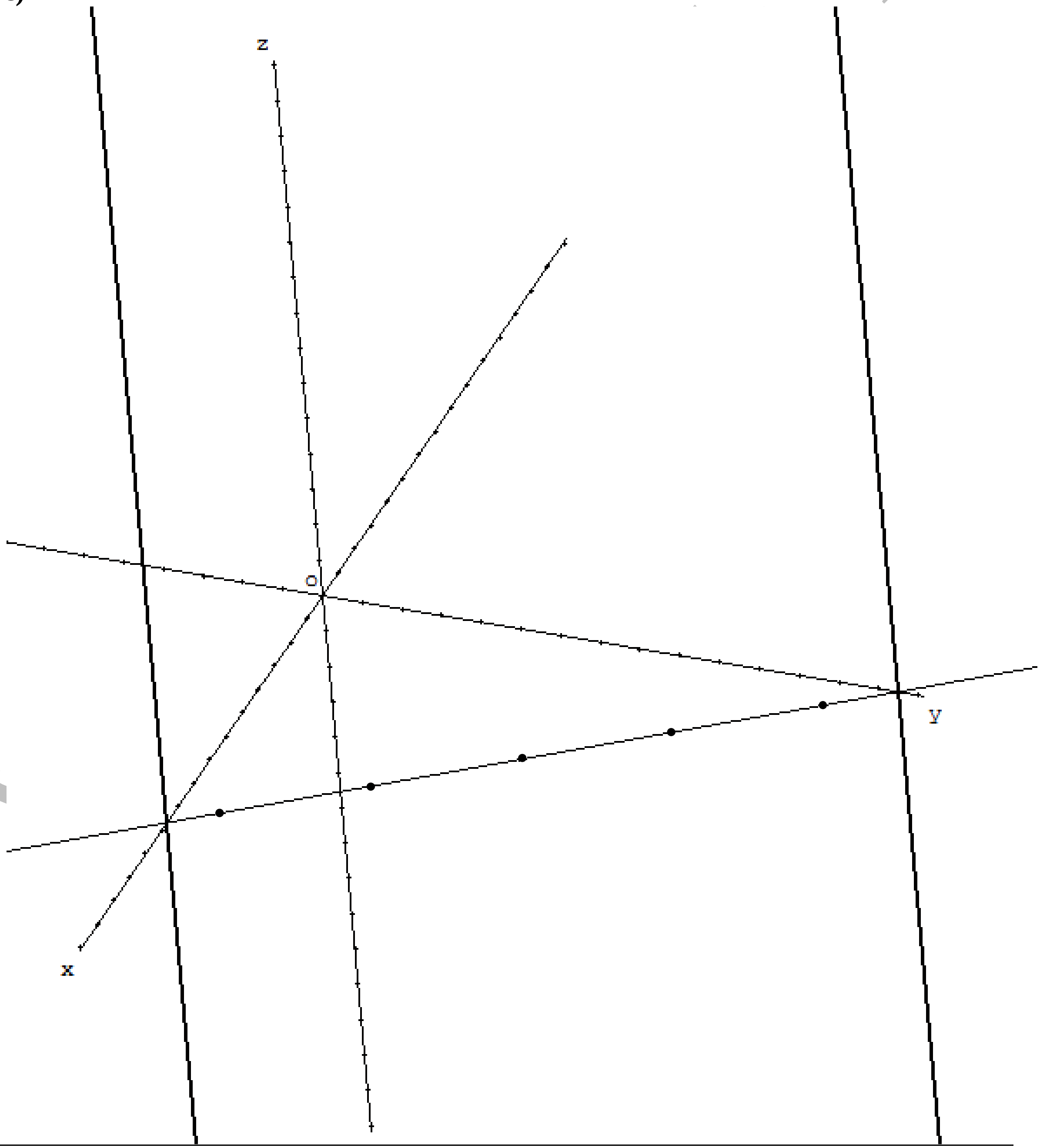
Le point M intersection de P et (Ox) a pour coordonnées $\left(\dfrac{29}{3} ; 0 ; 0\right)$.

Intersection N(x ; y ; z) de P et (Oy) :

Les coordonnées de n vérifie : $\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ soit $y = \dfrac{29}{2}$

Le point N intersection de P et (Oy) a pour coordonnées $\left(0 ; \dfrac{29}{2} ; 0\right)$.

c)



d) Voir figure ci-dessus.

3. S est la surface d'équation 4z = xy dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

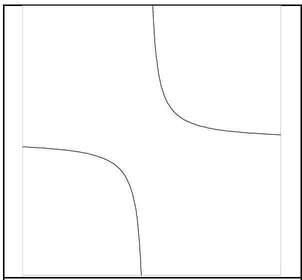
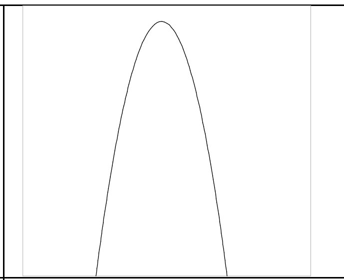
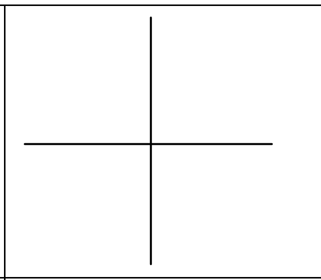
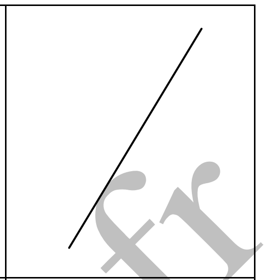
			

figure n°1	figure n°2	figure n°3	figure n°4

a) S_1 désigne la section de la surface S avec le plan (xOy) donc les points de S_1 vérifient z = 0 et xy = 0. S_1 est donc la réunion des axes (Ox) et (Oy).
La figure qui représente S_1 est la figure n°3.

b) S_2 désigne la section de S par le plan R d'équation z = 1 donc les points de S_2 vérifient : $xy = 4$ soit $y = \frac{4}{x}$. Il s'agit d'un hyperbole.
La figure qui représente S_2 est la figure n°1.

c) S_3 désigne la section de S par le plan d'équation y = 8 donc les points de S_3 vérifient : 4z = 8x soit z = 2x. Il s'agit de l'équation d'une droite.
La figure qui représente S_3 est la figure n°4.

d) S_4 désigne la section de S par le plan d'équation 3x + 2y = 29 de la question 2.
On connait l'abscisse x et l'ordonnée y des entiers naturels vérifiant l'équation :
3x + 2y = 29.
Reste à déterminer leur côte z :
Les points cherchés vérifient aussi l'équation de S_4 donc $z = \frac{xy}{4}$.

- $x = 1$; $y = 13$; $z = \frac{13}{4}$
- $x = 3$; $y = 10$; $z = \frac{15}{2}$
- $x = 5$; $y = 7$; $z = \frac{35}{4}$
- $x = 7$; $y = 4$; $z = 7$
- $x = 9$; $y = 1$; $z = \frac{9}{4}$

<u>Exercice 3 :</u> (4 points) *Commun à tous les candidats*

1. FAUX

Soit z un nombre complexe. Notons z = a + ib

$$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$\text{Re}\,(z^2) = a^2 - b^2 \quad \text{et} \quad (\text{Re}(z))^2 = a^2$$

Donc $\text{Re}\,(z^2) \neq (\text{Re}(z))^2$

2. VRAI

Soit z un nombre complexe non nul.

Soient les points M d'affixe z, N d'affixe $\overline{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$

$$OM = |z| \qquad ON = |\overline{z}| = |z|$$

$$OP = \left|\frac{z^2}{\overline{z}}\right| = \frac{|z^2|}{|\overline{z}|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$$

Donc OM = ON = OP

Donc les points M, N et P appartiennent à un même cercle de centre O.

3. VRAI

Soit z un nombre complexe. Notons z = a + ib

$$|1 + iz| = |1 - b + ia| = \sqrt{(1 - b)^2 + a^2}$$

$$|1 - iz| = |1 + b - ia| = \sqrt{(1 + b)^2 + a^2}$$

si $|1 + iz| = |1 - iz|$ alors

$$\sqrt{(1 - b)^2 + a^2} = \sqrt{(1 + b)^2 + a^2}$$

$$(1 - b)^2 = (1 + b)^2$$

$$(1 - b)^2 - (1 + b)^2 = 0$$

$$[(1 - b) - (1 + b)][(1 - b) + (1 + b)] = 0$$

$$-2b \times 2 = 0$$

$$b = 0$$

la partie imaginaire de z est nulle.

Pour tout nombre complexe z, si $|1 + iz| = |1 - iz|$ alors la partie imaginaire de z est nulle.

4. VRAI

Soient 2 nombres complexes z et z' non nuls d'images respectives M et M' dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On suppose que z et z' vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$.

Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

$$|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow \sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}$$

$$|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2 + 2bb' + b'^2 = a^2 - 2aa' + a'^2 + b^2 - 2bb' + b'^2$$

$$|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow 2aa' + 2bb' = -2aa' - 2bb'$$

$$|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow 4aa' + 4bb' = 0$$

$$|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow aa' + bb' = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe a + ib

Le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ a pour affixe a' + ib'

Donc $\overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OM'} = aa' + bb'$.

Donc $|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow \overrightarrow{OM} . \overrightarrow{OM'} = 0$

Donc $|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow$ les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

Exercice 4 : (5 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes C_n*

1. On résout $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ $\Leftrightarrow \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} - \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-(n+1)x} - e^{-nx} = 0$ (car $1 + e^{-x} \neq 0$)

$\Leftrightarrow e^{-nx}(e^{-x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} - 1 = 0$ car $e^{-nx} \neq 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} = 1$

$\Leftrightarrow$ **x = 0**

Calculons $f_n(0)$:

$\boldsymbol{f_n(0)} = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

Donc pour tout entier naturel n les courbes C_n ont un point A en commun de coordonnées $A\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Etude de la fonction f_0.

a) $f_0(x) = \dfrac{e^0}{1+e^{-x}}$ soit $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Calculons la dérivée de f_0

Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto 1 + e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

f_0 est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

f_0 est de la forme $\dfrac{1}{u}$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$

Alors $f_0'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive, donc $e^{-x} > 0$.

$(1 + e^{-x})^2 > 0$ car un carré est toujours positif

Alors $f_0'(x) > 0$, donc f_0 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Limite en $-\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ alors par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^{-x} = +\infty$,

par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = 0}$. **$f_0$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = 0.**

Limite en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, alors par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^{-x} = 1$

par quotient, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = 1}$, **$f_0$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation y = 1.**

c) Tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f_0'		$+$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	1

3. Etude de la fonction f_1.

a) $f_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$f_1(-x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

On a bien $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout réel x

b) Limites de f_1 en $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 1}$

Limites de f_1 en $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0}$

Sens de variations de f_1 :

Pour tout réel x : $f_0(x) = f_1(-x)$

Donc f_0 est la composée des fonctions f_1 et $x \mapsto -x$.

Sur $\mathbb{R}$, f_0 est croissante, la fonction $x \mapsto -x$ est décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par composition, on en déduit que **la fonction f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}$.**

c) Pour tout réel x : $f_0(x) = f_1(-x)$, cela signifie que **les courbes C_0 et C_1 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.**

4. Etude de la fonction f_n pour $n \geq 2$

a) Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$\frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}} = \frac{1}{e^{nx} + e^{nx} \times e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx}(1 + e^{-x})} = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout nombre réel x, on a : $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$

b) Limite de la fonction f_n en $-\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} nx = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0^+$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{nx} = 0^+$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (n-1)x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0^+$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{(n-1)x} = 0^+$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{nx} + e^{(n-1)x} = 0^+$.

Par quotient : $\lim\limits_{x \to -\infty}$ $\boldsymbol{f_n(x) = +\infty}$

Limite de la fonction f_n en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} nx = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{nx} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (n-1)x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{(n-1)x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{nx} + e^{(n-1)x} = +\infty$

Par quotient : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0^+}$

c) $x \longmapsto e^{nx}$ et $x \longmapsto e^{(n-1)x}$ sont 2 fonctions dérivables et non nulles sur $\mathbb{R}$. Donc par somme et division, f_n est aussi une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$ est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = e^{nx} + e^{(n-1)x}$.

$$f'_n(x) = -\frac{ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2}$$

$$f'_n(x) = -e^{nx} \times \frac{n + (n-1)e^{-x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2}$$

$n \geq 2$ donc $(n-1) \geq 0$.

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$e^{nx} \times \frac{n + (n-1)e^{-x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2} \geq 0.$$

$f'_n(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	
f_n	$+\infty$ ↘	0

Partie B : *Etude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

1. $u_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

Or $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$

Donc $u_1 = \left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0)$

$\mathbf{u_1 = \ln(2) - \ln(1+e^{-1})}$.

$\mathbf{u_0 + u_1} = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}+1}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 1\,dx = \mathbf{1}$

On en déduit que $u_0 = 1 - u_1$ soit $\mathbf{u_0 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1})}$

2. Sur $\mathbb{R}$,

$e^{-x} > 0$

$e^{-x} + 1 > 1 > 0$

$0 \leq \frac{1}{e^{-x}+1} \leq 1$ car $e^{-x} + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$

$0 \leq \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \leq e^{-nx}$ car $e^{-nx} > 0$ pour tout entier n

$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx$ (propriété de l'intégrale)

$\mathbf{0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx}$ **pour tout entier n.**

3. $\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{e^0}{n}$

$\mathbf{\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}}$.

$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx$

$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}\right)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{-n}}{n} = 0$

$0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$

D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente et admet pour limite 0.