

**Exercice 1 : (3 points)** Commun à tous les candidats

1. A et B sont deux événements indépendants donc  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$$p(\overline{A}) = \frac{3}{5} \quad \text{donc } p(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$p(A \cup B) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$\text{Donc} \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B)$$

$$\text{Soit} \quad p(B) = \frac{p(A \cup B) - p(A)}{1 - p(A)}$$

$$\text{Soit} \quad p(B) = \frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$$

Réponse b.

2.  $P(x > 5) = 1 - P(x \leq 5)$

$$P(x > 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$P(x > 5) = 1 - \left[ -e^{-\lambda x} \right]_0^5$$

$$P(x > 5) = 1 + e^{-5\lambda} - 1$$

$$P(x > 5) = e^{-5\lambda} \quad \text{avec } \lambda = 0,04$$

$$P(x > 5) = e^{-0,2} = \mathbf{0,82 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès}}$$

Réponse d.

3. Notons : P : l'événement " il pleut",  
S : l'événement " je sors mon chien"

Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre donc  $P(P) = \frac{1}{4}$

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à  $\frac{1}{10}$  donc  $P_P(S) = \frac{1}{10}$

S'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à  $\frac{9}{10}$  donc  $P_{\overline{P}}(S) = \frac{9}{10}$

Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :  $P_S(\overline{P})$

$$P_S(\overline{P}) = \frac{P(S \cap \overline{P})}{P(S)} = \frac{P_{\overline{P}}(S) \times P(\overline{P})}{P(S)}$$

Calcul de  $P(S)$  : P et  $\overline{P}$  forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(S \cap P) + P(S \cap \overline{P})$$

$$P(S) = P(P) \times P_P(S) + P(\overline{P}) \times P_{\overline{P}}(S) \quad \text{avec } P(\overline{P}) = 1 - P(P) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Donc} \quad P_S(P) = \frac{P_{\overline{P}}(S) \times P(\overline{P})}{P(P) \times P_P(S) + P(\overline{P}) \times P_{\overline{P}}(S)} = \frac{\frac{9}{10} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{9}{10}} = \frac{\frac{27}{40}}{\frac{28}{40}} = \frac{27}{28}$$

Réponse d.

**Exercice 2 : (8 points)**

Commun à tous les candidats

**Partie A****1. a)** Limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

$$\text{donc par composition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\text{donc par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \quad \text{donc par composition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x = +\infty \quad \text{Donc par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{b)} \quad f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$$

$$\text{On a déjà prouvé que : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{3}x \right] = 0$$

**Donc la droite (D) d'équation  $y = \frac{1}{3}x$  est asymptote à la courbe (C) au voisinage de  $+\infty$ .**

c) Position relative de (D) et de (C) :

$$f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$$

Etudions le signe de  $\ln(1 + e^{-x})$  :

$$\text{Sur } \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

donc

$$1 + e^{-x} > 1$$

La fonction  $\ln$  étant croissante sur  $]0; +\infty[$  on a :  $\ln(1 + e^{-x}) > \ln 1$ 

$$\text{Soit } \ln(1 + e^{-x}) > 0$$

$$\text{Donc sur } \mathbb{R}, f(x) - \frac{1}{3}x > 0.$$

**Sur  $\mathbb{R}$ , la courbe (C) est donc située au dessus de la droite (D).**

$$\text{d)} \quad \text{Pour tout réel } x : \quad f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x.$$

$$f(x) = \ln \left[ e^{-x} \left( \frac{1}{e^{-x}} + 1 \right) \right] + \frac{1}{3}x$$

$$f(x) = \ln [e^{-x} (e^x + 1)] + \frac{1}{3}x$$

$$f(x) = \ln e^{-x} + \ln(e^x + 1) + \frac{1}{3}x$$

$$f(x) = -x + \ln(e^x + 1) + \frac{1}{3}x$$

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$$

e) Limite de  $f$  en  $-\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{donc par somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \quad \text{donc par composition : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{3}x\right) = +\infty \quad \text{Donc par somme : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**2. a)** La fonction  $x \mapsto 1 + e^{-x}$  est dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Par composition la fonction  $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{3}x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Donc par somme la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} : \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} + \frac{1}{3}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$f'(x) = \frac{-3e^{-x} + 1 + e^{-x}}{3(1 + e^{-x})}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^{-x} + 1}{3(1 + e^{-x})}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{e^x} + 1}{3\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$$

**b)** Sur  $\mathbb{R}$ ,  $3(e^x + 1) > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est le même que celui de  $e^x - 2$ .

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2$$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2$$

$$e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^x < 2$$

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

$$e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \ln 2$$

Donc :

Sur  $]-\infty; \ln 2[$ ,  $f'(x)$  est négative, donc  $f$  est décroissante,

Sur  $]\ln 2; +\infty[$ ,  $f'(x)$  est positive, donc  $f$  est croissante,

Pour  $x = \ln 2$ ,  $f$  admet un minimum.

## Partie B

1. On a montré dans la question 1. c) de la partie A que : sur  $\mathbb{R} f(x) - \frac{1}{3}x > 0$ .

Donc l'aire  $d_n$  est égale à :  $\int_0^n \left( f(x) - \frac{1}{3}x \right) dx$

**Donc : pour tout entier naturel n non nul,  $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$**

2. On admet que pour tout réel  $x$ ,  $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$ .

Les fonctions  $x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$  et  $x \mapsto e^{-x}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[0, n]$ .

Donc par intégration :  $\int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \leq \int_0^n e^{-x} dx$

On a :  $\int_0^n e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^n = 1 - e^{-n}$  donc  $\int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \leq 1 - e^{-n}$

On a pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1 :  $-e^{-n} < 0$  donc  $1 - e^{-n} < 1$

Par conséquent :  $\int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \leq 1$

**Donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,  $d_n \leq 1$ .**

3. Soit  $n$  un entier naturel non nul :

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx - \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$$

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx + \int_n^0 \ln(1 + e^{-x}) dx$$

$$d_{n+1} - d_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx$$

Sur  $[n ; n + 1]$ ,  $\ln(1 + e^{-x}) > 0$  (Voir question 1. c) de la partie A).

On en déduit donc que  $\int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx > 0$ , donc  $d_{n+1} - d_n > 0$ .

La suite  $d_n$  est donc croissante, de plus elle est majorée par 1 (question 2.), **donc la suite  $(d_n)_{n \geq 1}$  est convergente.**

## Partie C

1. (T) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 donc le coefficient directeur de (T) est égal à  $f'(0)$ .

$$f'(0) = \frac{e^0 - 2}{3(e^0 + 1)} = -\frac{1}{6}$$

Le coefficient directeur de (T) est  $-\frac{1}{6}$

2. Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.

Notons m l'abscisse de M, celle de N est  $-m$ .

Les coordonnées de M sont  $(m ; f(m))$

Les coordonnées de N sont  $(-m ; f(-m))$

Le coefficient directeur a de la droite (MN) est :

$$a = \frac{f(m) - f(-m)}{m - (-m)}$$

$$a = \frac{\ln(1 + e^{-m}) + \frac{1}{3}m - \ln(1 + e^m) + \frac{1}{3}m}{2m}$$

$$a = \frac{\ln\left(\frac{1 + e^{-m}}{1 + e^m}\right) + \frac{2}{3}m}{2m}$$

$$a = \frac{3\ln\left(\frac{1 + \frac{1}{e^m}}{1 + e^m}\right) + 2m}{6m}$$

$$a = \frac{3\ln\left(\frac{e^m + 1}{e^m(1 + e^m)}\right) + 2m}{6m}$$

$$a = \frac{3\ln\frac{1}{e^m} + 2m}{6m}$$

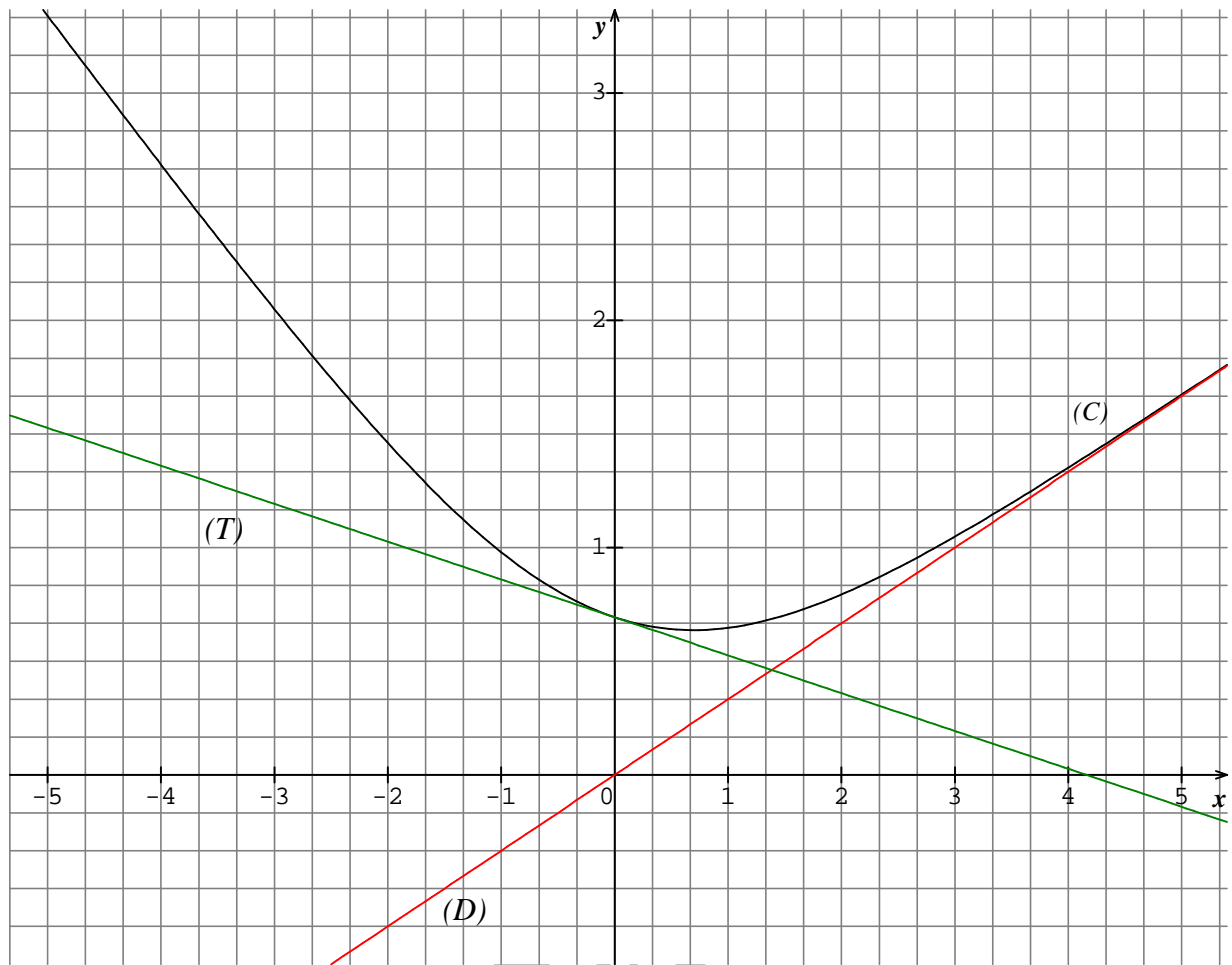
$$a = \frac{-3\ln e^m + 2m}{6m}$$

$$a = \frac{-3m + 2m}{6m}$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

Les droites (MN) et (T) ont donc le même coefficient directeur.

**Donc la droite (MN) est parallèle à la droite (T).**



**Exercice 3 : (5 points)**

Commun à tous les candidats

1. a) Coordonnées de I :

E a pour coordonnées (0 ; 0 ; 1) et F (1 ; 0 ; 1)

I milieu de [EF] donc **I a pour coordonnées**  $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ 

Coordonnées de J :

J le symétrique de E par rapport à F donc F est le milieu de [EJ].

E a pour coordonnées (0 ; 0 ; 1) et F (1 ; 0 ; 1).

$$\text{Donc } 1 = \frac{0 + x_J}{2} \quad \text{soit } x_J = 2$$

$$0 = \frac{0 + y_J}{2} \quad \text{soit } y_J = 0$$

$$1 = \frac{1 + z_J}{2} \quad \text{soit } z_J = 1$$

**J a pour coordonnées (2 ; 0 ; 1).**

$$\text{b) } B(1; 0; 0) \quad G(1; 1; 1) \quad I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \quad J(2; 0; 1) \quad D(0; 1; 0)$$

Coordonnées de  $\vec{BG}$  : (0 ; 1 ; 1)Coordonnées de  $\vec{BI}$  :  $\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ Coordonnées de  $\vec{DJ}$  : (2 ; -1 ; 1)

$$\vec{DJ} \cdot \vec{BG} = 2 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$$

$$\vec{DJ} \cdot \vec{BI} = -2 \times \frac{1}{2} - 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0.$$

Donc le vecteur  $\vec{DJ}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc **le vecteur  $\vec{DJ}$  est un vecteur normal au plan (BGI).**

c) Le vecteur  $\vec{DJ}$  de coordonnées (2 ; -1 ; 1) est un vecteur normal au plan (BGI) donc une équation cartésienne du plan (BGI) est donc :  $2x - y + z + d = 0$  avec d réel.

Or  $B \in (BGI)$  donc :  $2 \times 1 - 1 \times 0 + 1 \times 0 + d = 0$  soit  $d = -2$ .**Une équation cartésienne du plan (BGI) est donc :  $2x - y + z - 2 = 0$ .**

d) Distance d du point F au plan (BGI) :

$$d = \frac{|2x_F - y_F + z_F - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} \quad \text{avec } F(1; 0; 1)$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

2. a)  $(\Delta)$  est orthogonale au plan (BGI) donc un vecteur normal au plan (BGI) est aussi un vecteur directeur de la droite  $(\Delta)$ .

La droite  $(\Delta)$  a donc pour vecteur directeur  $\overrightarrow{DJ}$  de coordonnées  $(2; -1; 1)$  et passe par le point F de coordonnées  $(1; 0; 1)$ .

Une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  est donc : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit K le centre de la face ADHE. K est donc le milieu de [DE].

Les coordonnées de K sont donc  $\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

$$0 = 1 + 2t \quad \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = -t \quad \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = 1 + t \quad \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Donc le point K est un point de la droite  $(\Delta)$ .

c) (BGI) :  $2x - y + z - 2 = 0$  et  $(\Delta)$  
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On résout :  $2(1 + 2t) + t + 1 + t - 2 = 0$

$$2 + 4t + t + 1 + t - 2 = 0$$

$$6t + 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{6}$$

$$\text{Soit } x = \frac{2}{3}; y = \frac{1}{6}; z = \frac{5}{6}$$

La droite  $(\Delta)$  et le plan (BGI) sont donc sécants en un point, noté L, de coordonnées

$$\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right).$$

$$\mathbf{d)} \quad B(1; 0; 0) \quad I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \quad G(1; 1; 1) \quad L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$$

Coordonnées de :

$$\overrightarrow{BL}\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GI}\left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{GI} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + 0 = 0.$$

L appartient au plan (BGI), donc les droites (BL) et (GI) sont orthogonales, donc dans le triangle BGI, L appartient à la hauteur issue de B.

Coordonnées de :

$$\overrightarrow{GL}\left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BI}\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{GL} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{6} \times 1 = 0$$

L appartient au plan (BGI), donc les droites (GL) et (BI) sont orthogonales, donc dans le triangle BGI, L appartient à la hauteur issue de G.

Donc dans le triangle BGI, L est appartient à deux hauteurs, **L est donc l'orthocentre de BGI.**

**Exercice 4 : (5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$1. \quad z_A = -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad |z_A| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$z_A = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_B = \overline{z_A} \text{ donc } z_B = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

2. Voir figure à la fin.

$$3. \quad AB = |z_B - z_A| = \left| -\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left| -3 + \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \left| -3 + \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

**AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.****Partie B**Soit  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{1}{3}iz^2$ .

$$1. \quad \text{a) } z_{A'} = \frac{1}{3}i z_A^2 = \frac{1}{3}i \left(\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = i e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{13\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_{B'} = \frac{1}{3}i z_B^2 = \frac{1}{3}i \left(\sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = i e^{-i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_{C'} = \frac{1}{3}i z_C^2 = \frac{1}{3}i (-3)^2 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b) Voir figure à la fin.

$$\text{c) } z_{\overline{OA}} = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{\overline{OB'}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ donc } \overrightarrow{OA} = \sqrt{3} \overrightarrow{OB'}, \text{ les vecteurs sont colinéaires et donc } \mathbf{O, A \text{ et } B' \text{ sont alignés.}}$$

$$z_{\overline{OB}} = \sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{\overline{A'O}} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} \text{ donc } \overrightarrow{OB} = \sqrt{3} \overrightarrow{A'O}$$

Les vecteurs sont colinéaires et donc **O, A' et B sont alignés.**

2.

a) G l'isobarycentre des points O, A, B et C donc :

$$z_G = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4}$$

$$z_G = \frac{0 - \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$z_G = -\frac{3}{2}$$

$$z_{G'} = \frac{1}{3}i \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}i \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}i$$

Les affixes des points G et G' sont  $-\frac{3}{2}$  et  $\frac{3}{4}i$ .

b) Soit I l'isobarycentre de O', A', B' C'.

$$z_{O'} = \frac{1}{3}i \times z_O = 0.$$

$$z_I = \frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4}$$

$$z_I = \frac{0 + e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + 3i}{4} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 3i}{4} = i \neq \frac{3}{4}i.$$

Le point G' n'est pas l'isobarycentre des points O', A', B' et C'.

3. Soit M appartenant à la droite (AB).

(AB) est une droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en  $-\frac{3}{2}$ .Donc M a une partie réel égale à  $-\frac{3}{2}$  et une partie imaginaire qui varie.M a donc pour affixe :  $-\frac{3}{2} + ix$  avec x un réel.

Soit M' l'image de M par f.

$$z_{M'} = \frac{1}{3}i \left(-\frac{3}{2} + ix\right)^2$$

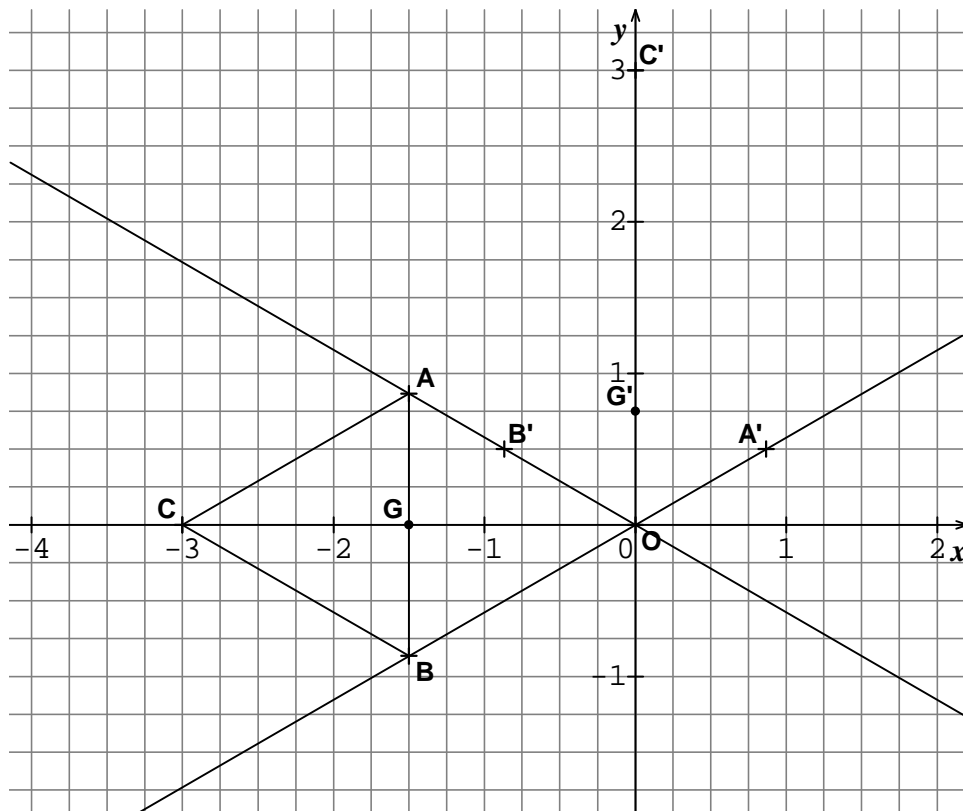
$$z_{M'} = \frac{1}{3}i \left(\frac{9}{4} - 3ix - x^2\right)$$

$$z_{M'} = \frac{3}{4}i + x - \frac{1}{3}i x^2$$

$$z_{M'} = x + i \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}x^2\right) \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = x \\ y_{M'} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}x^2 \end{cases}$$

Si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$$



**Exercice 4 : (5 points)***Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***Partie A**

1.  $2009 = 125 \times 16 + 9$  donc  $2009 \equiv 9 \pmod{16}$   
 $2009^2 \equiv 9^2 \pmod{16}$   
 $2009^2 \equiv 81 \pmod{16}$  avec  $81 = 16 \times 5 + 1$   
 $2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$

**Le reste de la division euclidienne de  $2009^2$  par 16 est 1.**

2.  $2009^{8001} = 2009 \times 2009^{8000}$   
 $2009^{8001} = 2009 \times (2009^2)^{4000}$
- $2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$   
 $(2009^2)^{4000} \equiv 1^{4000} \pmod{16}$   
 $2009^{8000} \equiv 1 \pmod{16}$   
 $2009 \times 2009^{8000} \equiv 2009 \times 1 \pmod{16}$   
 **$2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$ .**

**Partie B**

1. a)  $u_0 = 2009^2 - 1$  et  $2009 = 2000 + 9$   
 $2009 \equiv 9 \pmod{5}$   
 $2009 \equiv 4 \pmod{5}$   
 $2009^2 \equiv 4^2 \pmod{5}$   
 $2009^2 \equiv 16 \pmod{5}$   
 $2009^2 \equiv 1 \pmod{5}$   
 $2009^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$

 **$u_0$  est divisible par 5.**

- b) Formule du binôme de Newton :

$$(x + y)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} x^{n-k} y^k.$$

*Les coefficients peuvent aussi être trouvés à l'aide du triangle de Pascal :*

Soit  $n$  un entier naturel,

$$u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$$

$$u_{n+1} = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1$$

$$u_{n+1} = u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n$$

$$u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$$

Triangle de Pascal:
---------------------

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

**Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$ .**

c) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ .

initialisation : D'après la question B 1. a),  $u_0$  est divisible par 5 et  $5^{0+1} = 5$

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang  $n$  :  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$   
Montrons là au rang  $n + 1$ .

$u_n$  est divisible par  $5^{n+1} \Rightarrow$  il existe  $K$  tel que  $u_n = 5^{n+1} \times K$

$u_{n+1} = u_n [u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$  d'après la question précédente.

$$u_{n+1} = 5^{n+1} \times K [ (5^{n+1} \times K)^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) ]$$

$$u_{n+1} = 5^{n+1} \times K \times 5 [ 5^{4n+3} \times K^4 + (u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) ]$$

$$u_{n+1} = 5^{n+2} \times K [ 5^{4n+3} \times K^4 + (u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) ]$$

$u_{n+1}$  est divisible par  $5^{n+2}$ .

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, on en déduit que :

**Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ .**

2. a)

$$u_0 = 2009^2 - 1$$

$$u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = (2009^2 - 1 + 1)^5 - 1 = 2009^{2 \times 5} - 1 = 2009^{10} - 1$$

$$u_2 = (u_1 + 1)^5 - 1 = (2009^{10} - 1 + 1)^5 - 1 = 2009^{10 \times 5} - 1 = 2009^{50} - 1$$

$$u_3 = (u_2 + 1)^5 - 1 = (2009^{50} - 1 + 1)^5 - 1 = 2009^{50 \times 5} - 1 = 2009^{250} - 1$$

$$u_3 = 2009^{250} - 1$$

Or  $u_3$  est divisible par  $5^{3+1} = 625$  d'après la question précédente.

Donc  $2009^{250} - 1$  est aussi divisible par 625.

$$2009^{250} - 1 \equiv 0 \pmod{625}$$

$$2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}.$$

b)  $2009^{8001} = 2009^{32 \times 250 + 1} = (2009^{250})^{32} \times 2009$

$$2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}.$$

$$(2009^{250})^{32} \equiv 1^{32} \pmod{625}$$

$$(2009^{250})^{32} \equiv 1 \pmod{625}$$

$$2009 \times (2009^{250})^{32} \equiv 2009 \times 1 \pmod{625}$$

$$2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$$

## Partie C

1. D'après A 2. :  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$  donc  $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{16}$

D'après B 2. b)  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$  donc  $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{625}$

Donc  $2009^{8001} - 2009$  est divisible par 16 et 625. Or 16 et 625 sont premiers entre eux ( $16 = 2^4$  et  $625 = 5^4$ ).

Or le corolaire du théorème de Gauss dit que :

*Si un entier est divisible par des entiers  $a$  et  $b$  premiers entre eux, alors il est divisible par leur produit.*

$2009^{8001} - 2009$  est donc divisible par  $16 \times 625 = 10\,000$ .

**$2009^{8001} - 2009$  est divisible par 10000.**

2.  $2009^{8001} - 2009$  est divisible par 10000 donc  $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{10\,000}$

$$2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{10\,000}$$

$8001 = 3 \times 2667$  donc

$$(2009^{2667})^3 \equiv 2009 \pmod{10\,000}$$

Un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009 est  $2009^{2667}$ .