

Exercice 1 : (4 points)*Commun à tous les candidats*

1. a. Pour tout nombre entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{6}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 6)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et premier terme $v_0 = 1 - 6 = -5$.

b. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et premier terme $v_0 = -5$ donc :

Pour tout nombre entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n$

$$v_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme : $v_n = u_n - 6$ alors $u_n = v_n + 6$

Pour tout nombre entier naturel n , $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

c. Pour tout nombre entier naturel n , $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$

Pour tout nombre entier naturel n , $-5\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$ donc $u_n < 6$. u_n est majorée par 6.

$$u_{n+1} - u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 6 + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 6 = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On en déduit que : $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite u_n est croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 6, donc elle est convergente.

Exercice 2 : (6 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE I

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x e^{-x}) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x e^{-x}) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$$

donc par composée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.**2) Par composée de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$, la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.**

Pour tout nombre réel positif x : $f'(x) = \frac{1 \times e^{-x} - x e^{-x}}{1 + x e^{-x}} \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x)}{1+x e^{-x}}$$

Sur $[0 ; +\infty[: x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $1 + x e^{-x} > 0$ **Donc pour tout nombre réel positif x , le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.****3) Signe de $1 - x$:**

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

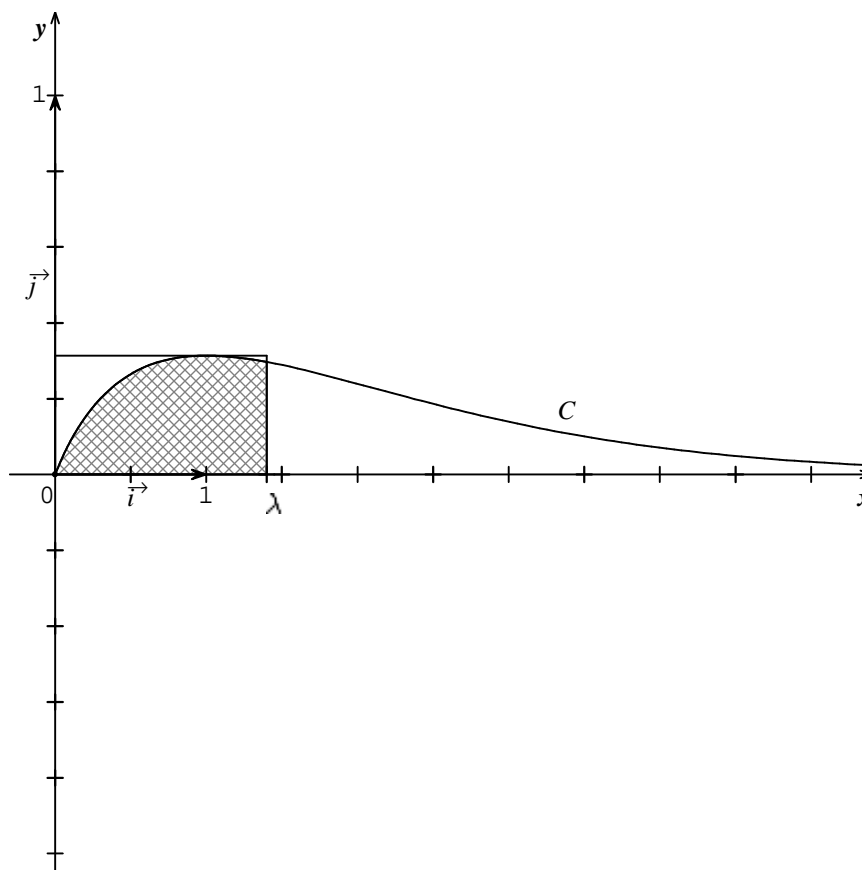
Donc :

Sur $[0 ; 1[$, $f'(x)$ est positive, donc f est croissante**Sur $]1 ; +\infty[$, $f'(x)$ est négative, donc f est décroissante**

PARTIE II**1) Première méthode.**

a) Sur $[0 ; +\infty[$, $1 + xe^{-x} > 1$, donc $f(x) > 0$

Donc la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $A(\lambda)$ est la partie du plan délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droite d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.



b) La partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $A(\lambda)$ est inscrite dans le rectangle de longueur λ et de largeur $f(1)$.

Donc pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda) \leq \lambda \times f(1)$.

2) Deuxième méthode.

a) Notons : $J = \int_0^\lambda x e^{-x} dx$

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$
 $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

Par intégration par partie :

$$J = [-x e^{-x}]_0^\lambda - \int_0^\lambda -e^{-x} dx$$

$$J = -\lambda e^{-\lambda} + 0 - [e^{-x}]_0^\lambda$$

$$J = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + e^0$$

$$J = 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}$$

b) On admet que pour tout nombre réel positif u , $\ln(1 + u) \leq u$.

On a sur $[0 ; +\infty[$, $x e^{-x} > 0$

Donc $\ln(1 + x e^{-x}) \leq x e^{-x}$

Les fonctions $x \mapsto \ln(1 + x e^{-x})$ et $x \mapsto x e^{-x}$ sont continues sur $[0 ; +\infty[$

Par passage à l'intégrale :

$$\int_0^\lambda \ln(1 + x e^{-x}) dx \leq \int_0^\lambda x e^{-x} dx$$

$$A(\lambda) \leq J$$

Donc pour tout nombre réel λ strictement positif : $A(\lambda) \leq 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}$

2) Application numérique.

Première méthode : $A(5) \leq 5 \times f(1)$
 $A(5) \leq 5 \times \ln(1 + e^{-1})$
 $A(5) \leq 1,57$

Deuxième méthode : $A(5) \leq 1 - 5e^{-5} - e^{-5}$
 $A(5) \leq 0,96$

La méthode qui donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$ est la deuxième méthode.

Exercice 3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

I. On sait que $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Alors $\binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$\binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$

Donc $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$

$$= \frac{(n-1)! p!(n-p-1)!}{(p-1)!(n-p)! p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!(p-1)!(n-p)!}{(p-1)!(n-p)! p!(n-p-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)! [p(p-1)!(n-p-1)! + (p-1)!(n-p)!]}{(p-1)!(n-p)! p!(n-p-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(p-1)![p(n-p-1)! + (n-p)(n-p-1)!]}{(p-1)!(n-p)! p!(n-p-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-p-1)![p+n-p]}{(n-p)! p!(n-p-1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-p)! p!}$$

$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$ pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leq n$

II. 1. a. A : « obtenir deux jetons blancs »

Il y a 10 jetons au total et on tire simultanément 2 jetons.

Il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ possibilités de tirer 2 jetons

Il y a 7 jetons blancs, donc il y a $\binom{7}{2} = 21$ possibilités de tirer 2 jetons blancs

Donc la probabilité de tirer deux jetons blancs est : $p(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$

b. B « obtenir deux jetons portant des numéros impairs »

Il y a 10 jetons au total et on tire simultanément 2 jetons

Il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ possibilités de tirer 2 jetons

Il y a 6 jetons impairs, donc il y a $\binom{6}{2} = 15$ possibilités de tirer 2 jetons impairs.

Donc la probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est :

$$p(B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

c. A et B sont indépendants si $p(A) \times p(B) = p(A \cap B)$

$A \cap B$ est l'événement : « les deux jetons tirés sont blancs et impaires ».

Il y a 10 jetons au total et on tire simultanément 2 jetons

Il y a donc $\binom{10}{2} = 45$ possibilités de tirer 2 jetons

Il y a 4 jetons blancs impairs, donc il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités de tirer 2 jetons blancs et impairs.

$$\text{Donc } p(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

$$p(A) \times p(B) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$$

Donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$

Les évènements A et B sont ne sont donc pas indépendants.

2. a. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané. X peut prendre les valeurs : 0 ; 1 et 2.

Pour avoir $X = 0$, on doit tirer 2 jetons noirs.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Pour avoir $X = 1$ on doit tirer 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 \times 7}{45} = \frac{7}{15}$$

Pour avoir $X = 2$ on doit tirer 2 jetons blancs.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

Loi de probabilité de X :

$X = x_i$	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

b. Espérance mathématique de X :

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15}$$

$$E(X) = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

Exercice 4 : (5 points)*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. a) $8 \times 1 - 5 \times 1 = 8 - 5 = 3$

Une solution particulière de (E) est (1, 1).Soient (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E).

(E) : $8x - 5y = 3$

$8x - 5y = 8 \times 1 - 5 \times 1$

$8(x - 1) = 5(y - 1)$

Or 8 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :

8 divise $(y - 1)$ et 5 divise $(x - 1)$

Il existe donc un entier relatif k tel que : $y - 1 = 8k$ et $x - 1 = 5k$
 $y = 1 + 8k$ et $x = 5k + 1$

On a démontré que si (x, y) un couple d'entiers relatifs est solution de (E) alors il existe un entier relatif k tel que $y = 1 + 8k$ et $x = 5k + 1$.Réciproquement : pour tout entier relatif k , le couple $(5k + 1 ; 1 + 8k)$ est solution de (E).

En effet : $8 \times (5k + 1) - 5 \times (1 + 8k) = 40k + 8 - 5 - 40k = 3$.

Conclusion : L'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation (E) est :

$\{ (1 + 5k ; 1 + 8k) ; k \in \mathbb{Z} \}$

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

Alors $8p + 1 = 5q + 4$ soit $8p - 5q = 3$

Le couple (p, q) est solution de l'équation (E).Le couple (p, q) étant solution de l'équation E, il existe un entier relatif k tel que :

$p = 1 + 5k$

$8p = 8 + 40k$

$8p \equiv 8 \pmod{40}$

$8p + 1 \equiv 9 \pmod{40}$

$m \equiv 9 \pmod{40}$

c) $2000 = 40 \times 50$

$2000 \equiv 0 \pmod{40}$

$2009 \equiv 9 \pmod{40}$

Le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000 qui vérifie $m \equiv 9 \pmod{40}$ est 2009.

2. Soit n un nombre entier naturel.

a) Soit k un nombre entier naturel

$$2^3 = 8$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$(2^3)^k \equiv 1^k \pmod{7}$$

$$2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$$

Pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.

b) $2009 = 2007 + 2$

$$2009 = 3 \times 669 + 2$$

$$2^{2009} = 2^{3 \times 669 + 2}$$

$$2^{2009} = 2^{3 \times 669} \times 2^2$$

$$2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^{3 \times 669} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$2^{2007} \equiv 1 \pmod{7}$$

$$4 \times 2^{2007} \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^{2009} \equiv 4 \pmod{7}$$

Le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est 4.

3. a) $10 \equiv 3 \pmod{7}$

$$10^3 \equiv 3^3 \pmod{7}$$

$$10^3 \equiv 27 \pmod{7} \quad \text{avec } 27 = -1 + 4 \times 7$$

$$10^3 \equiv -1 \pmod{7}.$$

b) $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.
 $a10^3 \equiv -a \pmod{7}$
 $a10^3 + b \equiv b - a \pmod{7}$
 $N \equiv b - a \pmod{7}$

Or on cherche les nombres entiers naturels N qui sont divisibles par 7 donc qui sont congrus à 0 (modulo 7).

On en déduit que $b - a \equiv 0 \pmod{7}$
ou $b \equiv a \pmod{7}$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k tel que $a \equiv k \pmod{7}$	1	2	3	4	5	6	0	1	2

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k tel que $b \equiv k \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2

1^{er} cas : k = 0

Pour a = 7 et b = 0 ou b = 7

• solutions possibles : **N = 7000 ou N = 7007**

2^{ème} cas : k = 1

Pour a = 1 ou a = 8 et b = 1 ou b = 8

• solutions possibles : **N = 1001 ou N = 1008 ou N = 8001 ou N = 8008**

3^{ème} cas : k = 2

Pour a = 2 ou a = 9 et b = 2 ou b = 9

• solutions possibles : **N = 2002 ou N = 2009 ou N = 9002 ou N = 9009**

4^{ème} cas : k = 3

Pour a = 3 et b = 3

• solutions possibles : **N = 3003**

5^{ème} cas : k = 4

Pour a = 4 et b = 4

• solutions possibles : **N = 4004**

6^{ème} cas : k = 5

Pour a = 5 et b = 5

• solutions possibles : **N = 5005**

7^{ème} cas : k = 6

Pour a = 6 et b = 6

• solutions possibles : **N = 6006**

Exercice 4 : (6 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

$$1. a) \quad OM = |z| \quad OM_1 = \left| \frac{1}{z} \right|$$

$$\text{Donc} \quad OM \times OM_1 = |z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{z}{z} \right| = |1| = 1$$

Les distances OM et OM₁ vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$.

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) = \arg z [2\pi]$$

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_1}) = \arg z [2\pi] = \arg \frac{1}{z} [2\pi] = \arg 1 - \arg z [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg 1 = 0$$

Donc les angles $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_1})$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ vérifient l'égalité des mesures suivantes

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

b) Le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2 donc $OA = 2$, donc $OA_1 = \frac{1}{2}$

A₁ appartient au cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$.

On a $(\vec{u} ; \overrightarrow{OA_1}) = -(\vec{u} ; \overrightarrow{OA})$ à 2π près, donc A₁ appartient à la droite symétrique de la demi droite [OA) par rapport à l'axe des abscisses.

Le point A₁ est donc le point d'intersection entre le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ et la droite symétrique de la demi droite [OA) par rapport à l'axe des abscisses.

Le point A' sera donc le milieu de [AA₁].

Voir figure en fin d'exercice

2. a) Le point M' est milieu du segment [MM₁] donc pour tout nombre complexe z non nul, le

$$\text{point M' a pour affixe : } z' = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

b) Soient B et C les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$.

$$\text{L'affixe du points B' image du point B est : } \frac{1}{2} \left(2i + \frac{1}{2i} \right) = i - \frac{i}{4} = \frac{3i}{4}$$

$$\text{L'affixe du points C' image du point C est : } \frac{1}{2} \left(-2i - \frac{1}{2i} \right) = -i + \frac{i}{4} = -\frac{3i}{4}$$

c) Voir figure en fin d'exercice

$$\begin{aligned} 3) \quad M' = M &\Leftrightarrow z' = z \\ M' = M &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = z \\ M' = M &\Leftrightarrow z + \frac{1}{z} - 2z = 0 \\ M' = M &\Leftrightarrow \frac{1}{z} - z = 0 \\ M' = M &\Leftrightarrow 1 - z^2 = 0 \quad \text{et} \quad z \neq 0 \\ M' = M &\Leftrightarrow z^2 = 1 \quad \text{et} \quad z \neq 0 \\ M' = M &\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -1 \end{aligned}$$

L'ensemble des points M tels que $M' = M$ est l'ensemble constitué des points d'affixe : **1 et -1**.

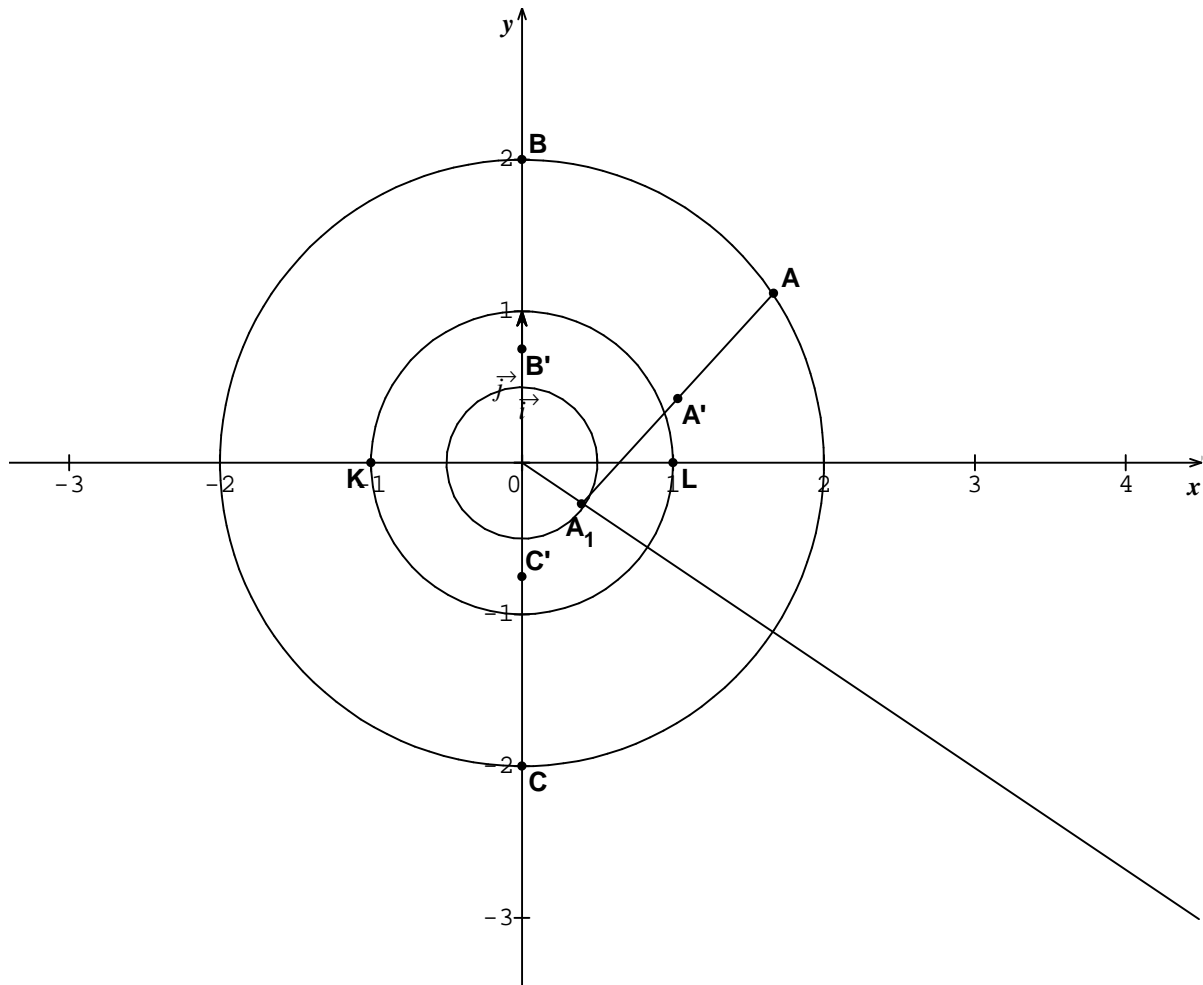
4) Si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors $OM = 1$ et $OM_1 = 1$.
 M_1 appartient aussi au cercle de centre O et de rayon 1.

Comme $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ à 2π près, les points M et M_1 sont sur des demi-droites d'origine O symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

On en déduit que leur milieu M' appartient à l'axe des abscisses.

Comme M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors le point M' sera entre le point d'affixe 1 et celui d'affixe -1

Donc si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.



WWW.2A