

Exercice 1 : (4 points) Commun à tous les candidats

1. a. Soit M' le point d'affixe z' image du M d'affixe z par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Alors l'écriture complexe de cette rotation est : $z' - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_A)$

L' image B' du point B a donc pour affixe :

$$z_{B'} = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$$

$$z_{B'} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3 + 4i - 1) + 1$$

$$z_{B'} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 4i) + 1$$

$$z_{B'} = (-1 + i\sqrt{3})(1 + 2i) + 1$$

$$z_{B'} = -1 - 2i + i\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 1$$

$$z_{B'} = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3}) \quad \text{donc } z_{B'} = z_D$$

Donc l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D .

b. On a : $AB = |z_B - z_A| = |3 + 4i - 1| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

Comme l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point D alors :

$$AB = AD = 2\sqrt{5}$$

Donc les points B et D sont sur un cercle C de centre A et de rayon $2\sqrt{5}$.

2.

a. Soit M' le point d'affixe z' image du M d'affixe z par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

Alors l'écriture complexe de cette homothétie est : $z' - z_B = \frac{3}{2}(z - z_B)$

L' image F du point A a donc pour affixe :

$$z_F = \frac{3}{2}(z_A - z_B) + z_B$$

$$z_F = \frac{3}{2}(1 - 3 - 4i) + 3 + 4i$$

$$z_F = -3 - 6i + 3 + 4i$$

$$z_F = -2i$$

L'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Le milieu du segment $[CD]$ a pour affixe : $\frac{z_C + z_D}{2}$

$$\frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) - 2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})}{2} = -2i$$

Donc le point F est le milieu du segment $[CD]$.

$$c. \quad \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) + 2i}{1 + 2i}$$

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{1 + 2i} \times \frac{1 - 2i}{1 - 2i}$$

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{5} \quad \text{soit} \quad \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$$

$$\text{Donc} \quad \left| \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} \right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \arg \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \arg(-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}$$

La forme exponentielle de $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$ est $\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Comme $\arg \frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) = -\frac{\pi}{2}$ alors les droites (CF) et (AF) sont perpendiculaires.

Comme F est le milieu du segment [CD], les points F, C et D sont alignés donc les droites (CD) et (AF) sont perpendiculaires.

Par conséquent la droite (AF) est perpendiculaire au segment [CD] et passe par son milieu F, alors **la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD]**.

3. On trace le cercle C de centre A passant par B.

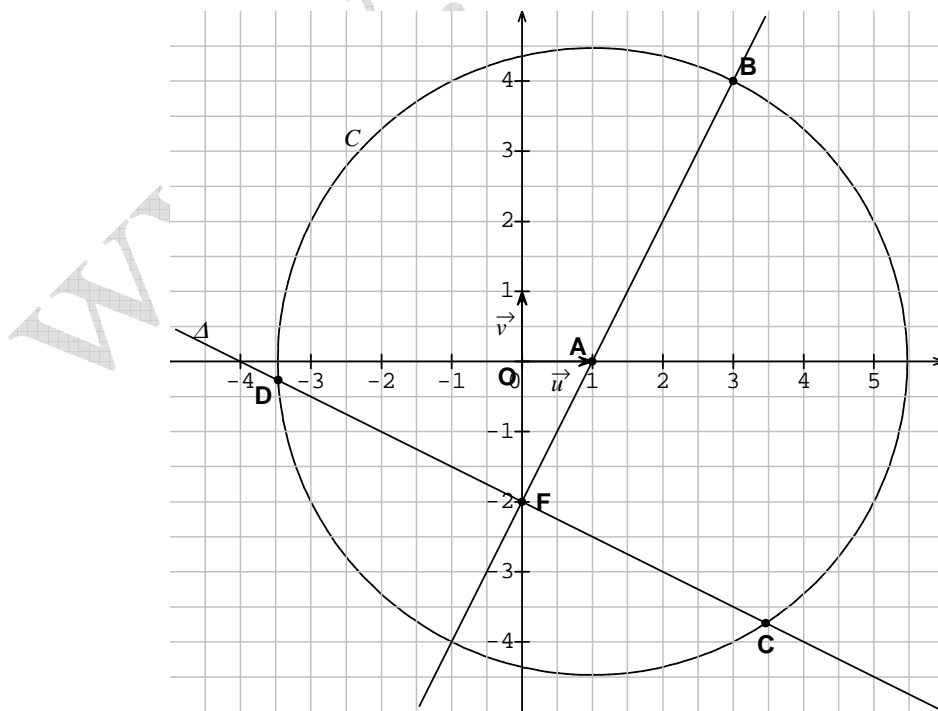
Comme le point D est sur le cercle C de centre A, il en est de même pour le point C (car A est sur la médiatrice du segment [CD] donc $AC = AD$).

On place le point F d'affixe $-2i$.

On trace la droite Δ perpendiculaire à la droite (AF) passant par F, comme la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD] alors les points C et D sont sur cette droite.

Les points C et D sont donc les 2 points d'intersection entre le cercle C et la droite Δ .

Le point C sera le point d'abscisse positif et le point D celui d'abscisse négatif.



Exercice 2 : (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. a. On a : $\overrightarrow{AB} : (-4, 2, 0)$ et $\overrightarrow{AC} : (-4, 0, 3)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan.

$$\text{b. } \begin{aligned} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= 3 \times (-4) + 6 \times 2 + 4 \times 0 = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= 3 \times (-4) + 6 \times 0 + 4 \times 3 = 0 \end{aligned}$$

Donc le vecteur \overrightarrow{n} est orthogonal à deux droites sécantes (en A) du plan (ABC), donc \overrightarrow{n} est un vecteur normal au plan (ABC).

c. $\overrightarrow{n} (3 ; 6 ; 4)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation du plan (ABC) est : $3x + 6y + 4z + d = 0$ avec d réel.

Or $A \in (ABC)$ donc : $3 \times 4 + 6 \times 0 + 4 \times 0 + d = 0$ soit $d = -12$

Une équation du plan (ABC) est donc : $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

d. Distance du point E au plan (ABC) :

$$\delta_E = \frac{\left| 3 \times \frac{2}{3} - 6 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{9} - 12 \right|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{\frac{122}{9}}{\sqrt{61}} = \frac{122}{9} \times \frac{\sqrt{61}}{61}$$

$$\text{Soit } \delta_E = \frac{2}{9} \sqrt{61}$$

2. a. Un vecteur directeur de la droite (D) est $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées $\left(1, 2, \frac{4}{3}\right)$.

\overrightarrow{n} a pour coordonnées $(3 ; 6 ; 4)$ donc on a $\overrightarrow{n} = 3 \overrightarrow{n'}$ donc $\overrightarrow{n'}$ et \overrightarrow{n} sont colinéaires ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{n'}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (D), par conséquent **elle est perpendiculaire au plan (ABC).**

$$E \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{9} \right) \quad (D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = 1 + t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} = 2t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{Donc le point E appartient à la droite (D).}$$

b. G est le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC).

Comme la droite (D) est perpendiculaire au plan (ABC) et que E appartient à la droite (D), alors le point G est le point d'intersection entre la droite (D) et le plan (ABC).

Déterminons les coordonnées de G :

$$(ABC) : 3x + 6y + 4z - 12 = 0 \text{ et } (D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R},$$

$$\text{On résout : } 3 \times (1 + t) + 6 \times 2t + 4 \times \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{3}t\right) - 12 = 0$$

$$3 + 3t + 12t + \frac{20}{9} + \frac{16}{3}t - 12 = 0$$

$$\frac{61}{3}t = \frac{61}{9} \quad \text{Soit } t = \frac{1}{3}$$

D'où les coordonnées de G : $G\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.

c. Comme G est le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC) alors la distance δ_E est égale à la distance EG.

$$EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2 + (z_G - z_E)^2}$$

$$EG = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2}$$

$$EG = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{64}{81}}$$

$$EG = \sqrt{\frac{244}{81}}$$

$$EG = \sqrt{\frac{4 \times 61}{81}}$$

$$EG = \frac{2}{9}\sqrt{61}$$

On retrouve bien $\delta_E = \frac{2}{9}\sqrt{61}$.

Exercice 3 : (5 points) Commun à tous les candidats

1. La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$ donc $a_1 = \frac{1}{2}$.

Comme $b_1 = 1 - a_1$ donc $b_1 = \frac{1}{2}$

A_1 et $\overline{A_1}$ forment une partition des possibilités d'atteindre la première cible, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$a_2 = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2)$$

$$a_2 = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$

$$a_2 = a_1 \times P_{A_1}(A_2) + b_1 \times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$ donc $P_{A_1}(A_2) = \frac{3}{4}$

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{1}{2}$ donc $P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{2}$

Donc : $a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ soit $a_2 = \frac{5}{8}$

Comme $b_2 = 1 - a_2$ donc $b_2 = \frac{3}{8}$

2. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

$$\text{Donc } P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$$

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

On a $P(A_n \cap A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n)$ Donc $P(A_n \cap A_{n+1}) = \frac{3}{4} a_n$

On a $P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \times P(\overline{A_n})$ Donc $P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = \frac{1}{2} b_n$

A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$$

Soit $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n$

$$a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2} (1 - a_n)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2}$$

3. a. Pour tout entier naturel n non nul :

$$U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{4} a_n - \frac{1}{6}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{4} a_n - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{4} U_n$$

Donc la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

b. La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ donc :

Pour tout entier naturel n non nul :
$$U_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

Comme $U_n = a_n - \frac{2}{3}$ alors
$$a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c.
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{4} < 1 \quad \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

d.
$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \geq 0,6665$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \geq 0,6665 - \frac{2}{3}$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \geq -\frac{0,0005}{3}$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \leq 0,001$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow (n-1) \ln \left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln 0,001 \quad \text{car } \ln \text{ est croissante sur }]0; +\infty[$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow (n-1) \geq \frac{\ln 0,001}{\ln \left(\frac{1}{4}\right)} \quad \text{car } \ln \left(\frac{1}{4}\right) < 0$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow (n-1) \geq -\frac{\ln 0,001}{\ln 4} \quad \text{car } \ln \left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow n \geq 1 - \frac{\ln 0,001}{\ln 4}$$

$$a_n \geq 0,6665 \Leftrightarrow n \geq 5,98$$

Le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geq 0,6665$ est donc 6.

Exercice 4 : (6 points) Commun à tous les candidats**1. a.** Signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} :Pour tout nombre réel x par : $e^{-x} > 0$.Donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de $(1+x)$.

Donc :

Sur $] -\infty ; -1[$, $f(x)$ est négatif,**Sur $] -1 ; +\infty[$, $f(x)$ est positif,****Pour $x = -1$, $f(x)$ est nul.****b.** Limite de la fonction f en $-\infty$: $f(x) = (1+x)e^{-x}$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ Donc par composition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+x) = -\infty$ Donc par produit : **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$** Limite de la fonction f en $+\infty$: $f(x) = (1+x)e^{-x} = e^{-x} + xe^{-x} = \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ Donc par somme : **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$** **c.** La fonction f est le produit des fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto e^{-x}$ toutes deux dérivables sur \mathbb{R} , donc par produit f est dérivable sur \mathbb{R} .Pour tout nombre réel : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (1+x) \times (-1)e^{-x}$ (uv)' = u'v + v'u
 $f'(x) = -xe^{-x}$ Pour tout nombre réel x par : $e^{-x} > 0$.Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-x$

Donc :

Sur $] -\infty ; 0[$, $f'(x)$ est positive, donc f est croissante**Sur $] 0 ; +\infty[$, $f'(x)$ est négative, donc f est décroissante****Pour $x = 0$, $f'(x)$ est nulle, donc f admet un maximum en 0.****d.** Voir figure en fin d'exercice

2. a. D'après la question 1.a. sur $]-1; +\infty[$, $f(x)$ est positif ou nul.

Donc d'après la positivité de l'intégrale, **pour tout $n \in \mathbf{N}$: $I_n \geq 0$.**

$$\begin{aligned} \text{b. Pour tout } n \in \mathbf{N} : I_{n+1} - I_n &= \int_{-1}^{n+1} f(x) dx - \int_{-1}^n f(x) dx \\ &= \int_{-1}^{n+1} f(x) dx + \int_n^{-1} f(x) dx \\ &= \int_n^{n+1} f(x) dx . \end{aligned}$$

Or sur $]-1; +\infty[$, $f(x)$ est positif ou nul, donc sur $[n; n+1]$ $f(x)$ est positif ou nul.

Donc d'après la positivité de l'intégrale : $\int_n^{n+1} f(x) dx > 0$.

Donc la suite (I_n) est croissante.

$$\text{3. a. Pour tous réels } a \text{ et } b : \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (1+x)e^{-x} dx$$

$$\begin{array}{ll} \text{Posons :} & u(x) = 1+x \quad \text{alors} \quad u'(x) = 1 \\ & v'(x) = e^{-x} \quad \text{alors} \quad v(x) = -e^{-x} \end{array}$$

Par intégration par parties :

$$\int_a^b f(x) dx = \left[-(1+x)e^{-x} \right]_a^b - \int_a^b -e^{-x} dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[-(1+x)e^{-x} \right]_a^b - \left[e^{-x} \right]_a^b$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[-(1+x)e^{-x} - e^{-x} \right]_a^b$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[(-2-x)e^{-x} \right]_a^b$$

$$\int_a^b f(x) dx = (-2-b)e^{-b} - (-2-a)e^{-a}.$$

Donc pour tous réels a et b : $\int_a^b f(x) dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}$.

b. Avec $a = -1$ et $b = n$ on a : $I_n = (-2-n)e^{-n} + e$.

$$\text{c. } I_n = (-2-n)e^{-n} + e = -\frac{2}{e^n} - \frac{n}{e^n} + e.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e$$

d. Sur $]-1; +\infty[$, $f(x)$ est positif, donc I_n est égale à l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimité par la courbe représentant f , l'axe des abscisse et les droites d'équation $x = -1$ et $x = n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e$ signifie donc que lorsque n tend vers l'infini, cette aire tend vers e .

$$4. \quad \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e \Leftrightarrow (-2 - \alpha)e^{-\alpha} + (2 - 1)e = e \quad (a = -1 \text{ et } b = \alpha)$$

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e \Leftrightarrow (-2 - \alpha)e^{-\alpha} = 0$$

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e \Leftrightarrow -2 - \alpha = 0 \quad \text{car } e^{-\alpha} \neq 0$$

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e \Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \text{car } e^{-\alpha} \neq 0$$

La valeur de α pour laquelle $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e$ est -2 .

1^{ère} solution si on considère qu'on ne doit pas transformer l'intégrale pour répondre à la question :

$\int_{-1}^{-2} f(x) dx$ ne correspond pas à un calcul d'aire car $-2 < -1$ (on doit avoir $a < b$ dans $\int_a^b f(x) dx$ pour pouvoir faire du calcul d'aire).

2^{ème} solution si on considère qu'on peut transformer l'intégrale pour répondre à la question :

$\int_{-1}^{-2} f(x) dx = - \int_{-2}^{-1} f(x) dx$. Or $f(x) \leq 0$ sur $[-2; -1]$.

Donc cette intégrale correspond à l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = -2$ et $x = -1$.

