<u>Exercice 1 :</u> (4 points) *Commun à tous les candidats*

1. Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.

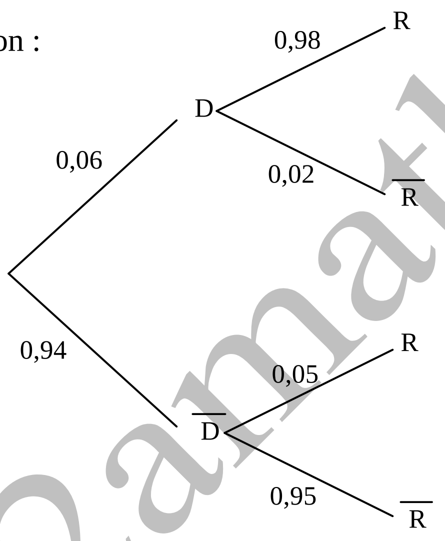
$$\text{Donc} \quad P(D) = \frac{6}{100} = 0{,}06 \quad \text{et} \quad P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0{,}94$$

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

$$\text{Donc} \quad P_D(R) = \frac{98}{100} = 0{,}98 \quad \text{et} \quad P_D(\overline{R}) = 1 - P_D(R) = 0{,}02$$

$$P_{\overline{D}}(R) = \frac{5}{100} = 0{,}05 \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(\overline{R}) = 1 - P_{\overline{D}}(R) = 0{,}95$$

Arbre pondéré représentant la situation :



2. a) La probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté est égale à $P(D \cap \overline{R})$.

$P(D \cap \overline{R}) = P_D(\overline{R}) \times P(D)$

$P(D \cap \overline{R}) = 0{,}02 \times 0{,}06$

$\mathbf{P(D \cap \overline{R}) = 0{,}0012}$

b) La probabilité que le lecteur MP3 soit rejeté alors qu'il n'est pas défectueux est égale à :
$P(R \cap \overline{D})$

La probabilité que le lecteur MP3 ne soit pas rejeté alors qu'il est défectueux est égale à :
$P(\overline{R} \cap D)$

Il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux donc la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est égale à : $P(R \cap \overline{D}) + P(\overline{R} \cap D) = 0{,}05 \times 0{,}94 + 0{,}02 \times 0{,}06 = 0{,}0482$

La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est donc de 0,0482.

3. D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers, d'après la formules des probabilités totales :

$P(\overline{R}) = P(D \cap \overline{R}) + P(\overline{D} \cap \overline{R})$

$P(\overline{R}) = P_D(\overline{R}) \times P(D) + P_{\overline{D}}(\overline{R}) \times P(\overline{D})$

$P(\overline{R}) = 0,02 \times 0,06 + 0,95 \times 0,94$

$P(\overline{R}) = 0,8942$

La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.

4. a) La variable G peut prendre les valeurs : 120 – 50 = 70 / 60 – 50 = 10 / 0 – 50 = – 50

Notons Y la variable aléatoire qui correspond aux nombres de contrôle réussit avec succès.
On réalise quatre contrôles successifs indépendants qui ont 2 issues possibles. Soit le lecteur n'est pas rejeté avec une probabilité $p = P(\overline{R}) = 0,8942$ soit il est rejeté avec une probabilité $q = 1 - p$
Y suit donc une loi binomiale de paramètre n = 4 et p = 0,8942.

$P(G = 70) = P(Y = 4) = \binom{4}{4} \times 0,8942^4 \times (1 - 0,8942)^0 = 0,8942^4 = 0,6393$

$P(G = -50) = P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$

$= \binom{4}{0} \times 0,8942^0 \times 0,1058^4 + \binom{4}{1} \times 0,8942^1 \times 0,1058^3 + \binom{4}{2} \times 0,8942^2 \times 0,1058^2$

$= 0,1058^4 + 4 \times 0,8942 \times 0,1058^3 + 6 \times 0,8942^2 \times 0,1058^2$

$= 0,0581$

$P(G = 10) = 1 - P(G = 70) - P(G = -50) = 0,3026$

Loi de probabilité de la variable aléatoire G

$X = x_i$	**70**	**10**	**– 50**
$P(X = x_i)$	**0,6393**	**0,3026**	**0,0581**

b) Espérance mathématique de G :

$E(G) = 70 \times 0,6393 + 10 \times 0,3026 + (-50) \times 0,0581$

E(G) = 44,87 à 10^{-2} près

Ce qui signifie que en moyenne, le gain réalisé par l'entreprise sur la vente d'un lecteur MP3 est de 44,87 €.

Exercice 2 : **(5 points)** *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

Partie A: Restitution organisée de connaissances

Le point M d'affixe z a pour image M' le point d'affixe z' par la rotation de centre Ω d'affixe w et d'angle α si : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$

ΩM' = ΩM se traduit par : $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ soit $\dfrac{|z' - w|}{|z - w|} = 1$ (d'après le pré requis)

$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi]$ se traduit par : $\arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) = \alpha\ [2\pi]$ (d'après le pré requis)

Donc M a pour image M' dans la rotation de centre Ω d'affixe w et d'angle α si :

$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{z' - w}{z - w}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) = \alpha\ [2\pi] \end{array}\right\}$ Soit $\left(\dfrac{z' - w}{z - w}\right) = e^{i\alpha}$ (d'après le pré requis)

Donc : **la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe w est la transformation du plan, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' - w = e^{i\alpha}(z - w)$.**

Partie B

1. a) Soit Ω le point d'affixe w

$$\begin{aligned} f(\Omega) = \Omega \quad &\Leftrightarrow \quad w = iw + 4 + 4i \\ &\Leftrightarrow \quad w(1 - i) = 4 + 4i \\ &\Leftrightarrow \quad w = \frac{4(1 + i)}{1 - i} \\ &\Leftrightarrow \quad w = \frac{4(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \\ &\Leftrightarrow \quad w = \frac{4(1 + 2i - 1)}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{w = 4i} \end{aligned}$$

b) Pour tout nombre complexe z, on a :

$$z' - 4i = iz + 4$$

$$z' - 4i = i\left(z + \frac{4}{i}\right)$$

$$\mathbf{z' - 4i = i(z - 4i)}$$

c) Pour tout nombre complexe z, on a : $z' - 4i = i(z - 4i)$

$$z' - 4i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 4i)$$

La transformation *f* est donc une rotation de centre Ω d'affixe 4i et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives a = 4 – 2i et b = – 4 + 6i.

a) Voir figure en fin d'exercice.

b) A' = f(A) ⇔ a' = ia + 4 + 4i.
⇔ a' = i(4 – 2i) + 4 + 4i.
⇔ a' = 6 + 8i

B' = f(B) ⇔ b' = ib + 4 + 4i.
⇔ b' = i(– 4 + 6i) + 4 + 4i.
⇔ b' = – 2

Les affixes a' et b' des points A' et B', images respectives des points A et B par *f* sont :
a' = 6 + 8i et b' = – 2

3. On appelle m, n, p et q les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments [AA'], [A'B], [BB'] et [B'A].

a) M est le milieu de [AA'] donc :

$$m = \frac{a + a'}{2} = \frac{4 - 2i + 6 + 8i}{2} \quad \text{soit } \mathbf{m = 5 + 3i}$$

On admettra que n = 1 + 7i, p = –3 + 3i et q = 1 – i.

b) Affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$: n – m = 1 + 7i – 5 – 3i = – 4 + 4i

Affixe du vecteur $\overrightarrow{QP}$: p – q = – 3 + 3i – 1 + i = – 4 + 4i

Donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Donc MNPQ est un parallélogramme.

c) $$\frac{q-m}{n-m} = \frac{1 - i - 5 - 3i}{1 + 7i - 5 - 3i} = \frac{-4-4i}{-4+4i} = \frac{(-4-4i)(-4-4i)}{(-4+4i)(-4-4i)} = \frac{32i}{32} = i$$

$\left|\frac{q-m}{n-m}\right| = \frac{MQ}{MN}$ et $|i| = 1$ donc MQ = MN

$\arg\left(\frac{q-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}\right)$ et $\arg i = \frac{\pi}{2}$ donc $\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}\right) = \frac{\pi}{2}$

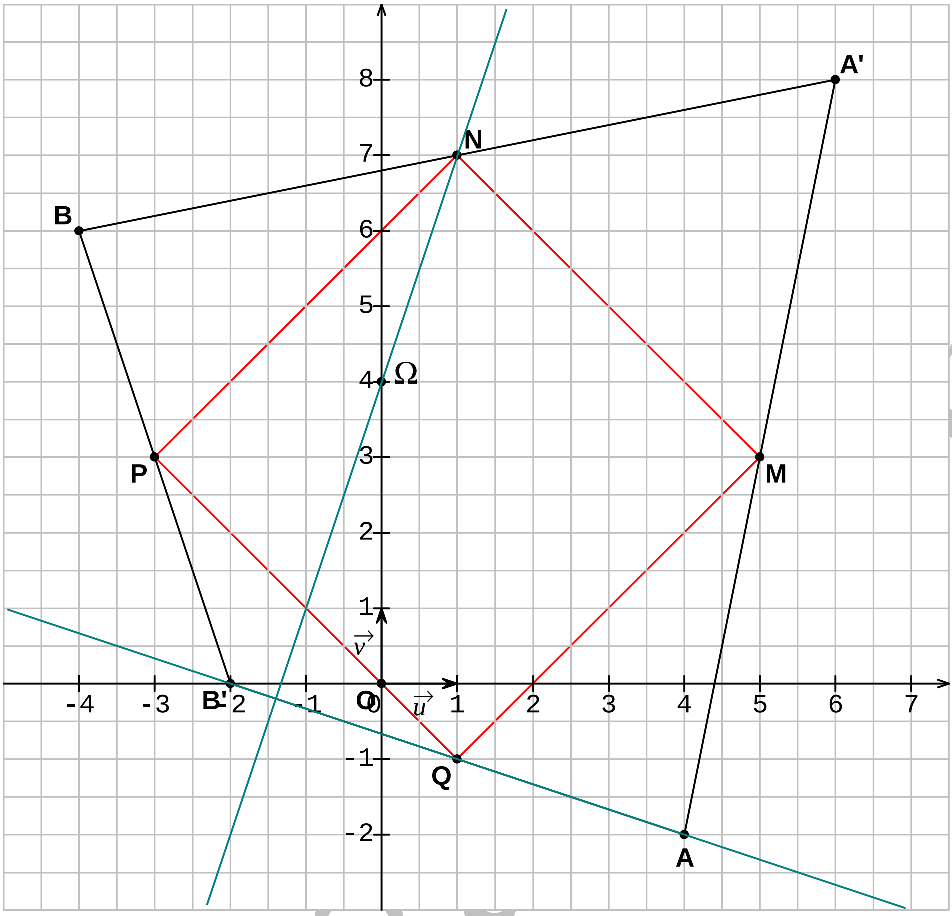
Le quadrilatère MNPQ est donc un carré.

4. Affixe du vecteur $\overrightarrow{B'A}$: a – b' = 4 – 2i + 2 = 6 – 2i

Affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega N}$: n – w = 1 + 7i – 4i = 1 + 3i

$\overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{\Omega N} = 6 \times 1 - 2 \times 3 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{\Omega N}$ sont orthogonaux, **les droites (B'A) et (ΩN) sont donc perpendiculaires.**


A'
N
B
Ω
P
M
B'
O
Q
A
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

<u>Exercice 2 :</u> (5 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

Partie A: Restitution organisée de connaissances

Soient z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes des points A, B, A', B'.On sait que : $z_A \neq z_B$ et $z_{A'} \neq z_{B'}$

Il existe une unique similitude transformant A en B et A' en B' si et seulement si il existe un unique couple (a ;b) de complexes (avec a non nul) tels que : $\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases}$

Résolvons ce système de deux équations à deux inconnues a et b.

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_{A'} - z_{B'} = a(z_A - z_B) \\ b = z_{B'} - az_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \\ b = z_{B'} - \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} z_B \end{cases} \quad \text{car } z_A \neq z_B$$

Ce système admet une unique solution (a ;b) de complexes, et de plus a est non nul car : $z_{A'} \neq z_{B'}$

Il existe donc une unique similitude transformant A en A' et B en B'.

Partie B

1. Voir figure en fin d'exercice

2. Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $z_B - z_A = 2 - 2i$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$: $z_C - z_A = 4 + 6i - 2i = 4 + 4i$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 4 - 2 \times 4 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux, par conséquent **le triangle ABC est rectangle en A.**

On peut voir qu'il n'est pas isocèle : $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$AC = |z_C - z_A| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

3. Soit f la similitude plane directe telle que f(A) = D et f(B) = A.

a) Une écriture complexe de f est z' = az + b avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

f(A) = D f(B) = A.

d'après la partie A : $a = \dfrac{z_D - z_A}{z_A - z_B} = \dfrac{-1 + i - 2i}{2i - 2} = \dfrac{-1 - i}{-2 + 2i} = \dfrac{1 + i}{2 - 2i} = \dfrac{(1+i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \dfrac{1}{2}i$

$$b = z_A - az_B = 2i - \frac{1}{2}i \times 2 = i$$

L'écriture complexe de f est : $z' = \frac{1}{2}i\, z + i$

b) $\left|\frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \frac{1}{2}$ **le rapport de *f* est $\frac{1}{2}$**

$\arg\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{2}$ **l'angle de *f* est $\frac{\pi}{2}$**

$$\begin{aligned} z' = z \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\mathrm{i}\, z + \mathrm{i} = z \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{i}z + 2\mathrm{i} = 2z \\ &\Leftrightarrow \quad z(2 - \mathrm{i}) = 2\mathrm{i} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{2\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{2\mathrm{i}(2 + \mathrm{i})}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-2 + 4\mathrm{i}}{5} \end{aligned}$$

le centre Ω de *f* a pour affixe $w = \frac{-2 + 4\mathrm{i}}{5}$

c) Déterminons l'image de C par *f* :

$$\frac{1}{2}\mathrm{i}\, z_C + \mathrm{i} = \frac{1}{2}\mathrm{i}(4 + 6\mathrm{i}) + \mathrm{i} = 2\mathrm{i} - 3 + \mathrm{i} = -3 + 3\mathrm{i} = z_E$$

On a donc ; *f*(C) = E, *f*(A) = D et *f*(B) = A.

Donc le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude *f*.

d) Une similitude directe conserve l'orthogonalité, comme le triangle ABC est rectangle, il en est de même pour **le triangle DAE qui est donc rectangle en en D.**

4. a) On a *f* (B) = A et *f* (A) =D donc *f* ([AB]) = [AD].

On en déduit que l'image du cercle (Γ_1) par *f* est le cercle (Γ_2).

M appartenant à (Γ_1) , son image par *f* appartient au cercle (Γ_2).

On a *f* (B) =A et *f* C) = E donc *f* ((BC)) = (AE)

M étant un point de la droite (BC), son image par *f* est donc un point de la droite (AE).

L'image de M par *f* est donc le point d'intersection entre le cercle (Γ_2) et la droite (AE).

M étant différent de B, **l'image de M par *f* est donc le point N.**

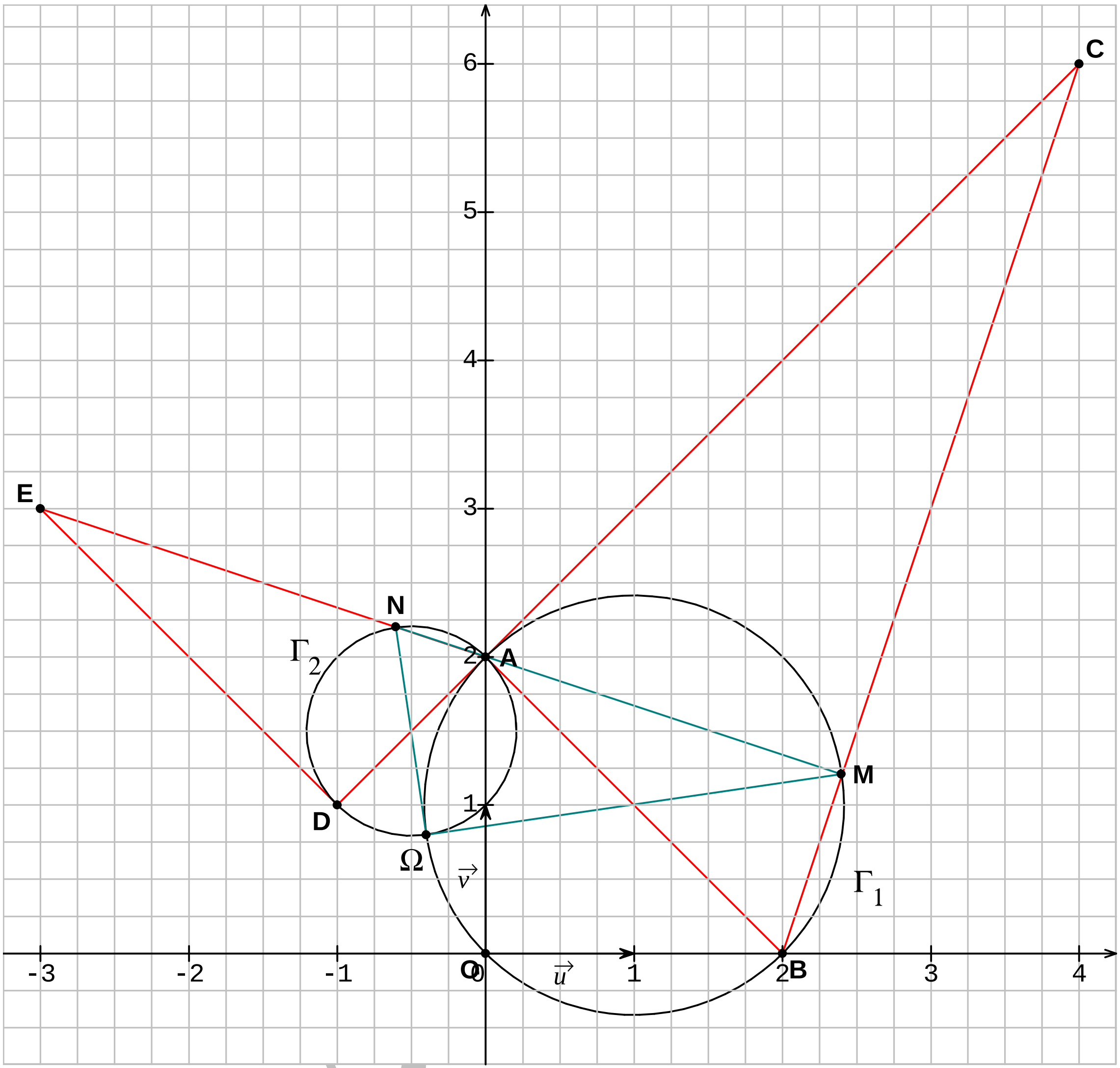
b) Comme l'angle de *f* est $\frac{\pi}{2}$, et que *f* (M) = N, alors $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}\right) = \frac{\pi}{2}$

Le triangle ΩMN est donc rectangle en Ω.

c) *f* (B) = A et *f* (M) = N donc $\frac{NA}{MB} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ est le rapport de *f*

f(C) = E et *f* (M) = N donc $\frac{NE}{MC} = \frac{1}{2}$

Donc : $\frac{NA}{MB} = \frac{NE}{MC}$ soit **MB × NE = MC × NA.**


C
E
N
A
M
D
B
O
Γ_2
Γ_1
Ω
$\vec{v}$
$\vec{u}$
6
5
4
3
2
1
0
-3
-2
-1
1
2
3
4

Exercice 3 : (5 points) *Commun à tous les candidats*

1. a) Le barycentre du système {(A,2),(B,– 1),(C,1)} a pour coordonnées :

$$\left(\frac{2x_A - x_B + x_C}{2-1+1}, \frac{2y_A - y_B + y_C}{2-1+1}, \frac{2z_A - z_B + z_C}{2-1+1}\right) \text{ soit } (4, -6, 2)$$

Le barycentre du système {(A,2),(B,– 1),(C,1)} est donc le point E.

b) E est le barycentre du système {(A,2),(B,– 1),(C,1)}, donc pour tout point M de l'espace on a :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{ME}$$

$$\begin{aligned} M \in \Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\|2\overrightarrow{ME}\right\| = 2\sqrt{21} \\ &\Leftrightarrow \quad 2ME = 2\sqrt{21} \\ &\Leftrightarrow \quad ME = \sqrt{21} \end{aligned}$$

L'ensemble Γ des points M de l'espace tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$ est donc la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{21}$.

2. a) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: (– 1, 4, – 2) Coordonnées de $\overrightarrow{AD}$: (1, 2, 0)

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc **les points A, B et D ne sont pas alignés et définissent donc un plan.**

b) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: (– 1, 4, – 2) Coordonnées de $\overrightarrow{AD}$: (1, 2, 0)
Coordonnées de $\overrightarrow{EC}$: (2, – 1, – 3)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = -1 \times 2 - 4 \times 1 + 2 \times 3 = 0$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EC} = 1 \times 2 - 2 \times 1 - 0 \times 3 = 0$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal au plan (ABD).
Donc la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c) Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ de coordonnées (2, – 1, – 3) est un vecteur normal au plan (ABD) donc une équation cartésienne du plan (ABD) est donc : $2x - y - 3z + d = 0$ avec d réel.

Or A $\in$ (ABD) donc : $2 \times 1 - 1 \times (-1) - 3 \times 3 + d = 0$ soit $d = 6$.
Une équation cartésienne du plan (ABD) est donc : $2x - y - 3z + 6 = 0$.

3. a) La droite (EC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EC}$ de coordonnées (2, – 1, – 3) et passe par le point E de coordonnées (4, – 6, 2).

Une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc : $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ **, $t \in \mathbb{R}$.**

b) (ABD) : $2x - y - 3z + 6 = 0$ et (EC) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

On résout :

$$2(4 + 2t) - (-6 - t) - 3(2 - 3t) + 6 = 0$$
$$8 + 4t + 6 + t - 6 + 9t + 6 = 0$$
$$14t + 14 = 0$$
$$t = -1$$

Soit $x = 2$; $y = -5$; $z = 5$

Les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD) sont (2, – 5, 5).

4. Comme la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD), le point F est le projeté orthogonale du point E sur le plan (ABD).

La distance du point E au plan (ABD) est donc égale à la distance EF.

$$EF = \sqrt{(2-4)^2 + (-5+6)^2 + (5-2)^2}$$
$$EF = \sqrt{4 + 1 + 9}$$
$$EF = \sqrt{14}$$

L'ensemble Γ est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{21}$.

Comme $\sqrt{14} < \sqrt{21}$, le plan (ABD) et l'ensemble Γ sont donc sécants.

L'intersection entre le plan (ABD) et l'ensemble Γ est un cercle de centre F.

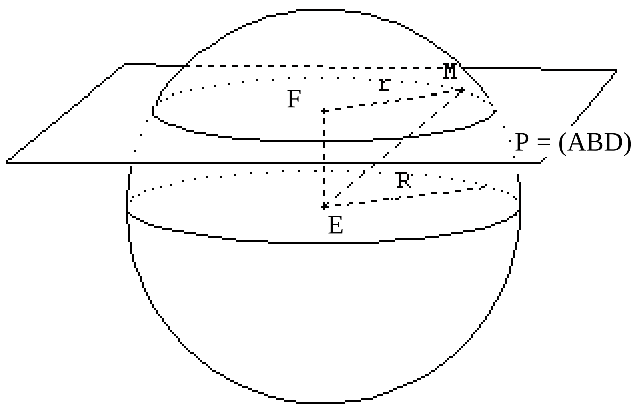
Rayon de ce cercle : D'après le théorème de Pythagore

On a $(\sqrt{21})^2 = (\sqrt{14})^2 + r^2$

$r^2 = 21 - 14$

$r = \sqrt{7}$

Le plan (ABD) et l'ensemble Γ sont sécants selon un cercle de centre F et de rayon $\sqrt{7}$.



Exercice 4 : **(6 points)** *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. Sur [0 ; + ∞[, *f* ’ est continue et une primitive de *f* ’est *f*.

Donc $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$

La courbe (C) passe par les points O et A $\left(1\ ,\ \dfrac{1}{2e}\right)$ donc $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{2e}$

Donc $\int_0^1 f'(x)dx = \dfrac{1}{2e}$.

2. Sur [0,1], la courbe (C) est au dessus du segment [OA] donc $f(x) > 0$.

L’intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est égale à l’aire notée *A*, en unité d’aire, de la partie du plan délimitée par l’axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d’équations x = 0 et x = 1.
Notons I le point de coordonnées (1 ; 0).

L’aire, en unité d’aire, du triangle OAI qui est rectangle en I vaut : $\dfrac{OI \times IA}{2} = \dfrac{1 \times \dfrac{1}{2e}}{2} = \dfrac{1}{4e}$.

Comme sur [0,1], la courbe (C) est au dessus du segment [OA], on en déduit que l’aire *A* est supérieure à l’aire du triangle OAI.

On a donc : $\int_0^1 f(x)dx \geq \dfrac{1}{4e}$

Partie B

1. Limite de *f* en + ∞ :

$$\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

Donc par quotient $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Donc la droite d’équation y = 0 est une asymptote horizontale au voisinage de + ∞ à la courbe (C).

2. La fonction g est une fonction polynôme, donc dérivable sur [0 , + ∞[.
Pour tout x de [0 ; + ∞[: $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Discriminant de $3x^2 + 2x + 1$: $\Delta = 4 - 4 \times 3 = -8 < 0$.
Donc $3x^2 + 2x + 1$ est strictement positif sur [0 ; + ∞[.
On en déduit alors que la fonction g est strictement croissante sur [0 ; + ∞[.

On a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $g(0) = -1$.

Sur [0 ; + ∞[, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante à valeurs dans [– 1 ; + ∞[.
Or 0 ∈ [– 1 ; + ∞[, donc d’après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [0 , + ∞[.**

3. a) La fonction f est dérivable sur $[0 , + \infty[$.

Pour tout x de $[0 , + \infty[$: $f = \dfrac{u}{v}$

avec $u(x) = xe^{-x}$ et $v(x) = x^2 + 1$

$u'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$ et $v'(x) = 2x$

$u'(x) = e^{-x}(1 - x)$

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v(x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(1 - x)(x^2 + 1) - xe^{-x} \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}[(1 - x)(x^2 + 1) - 2x^2]}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(x^2 + 1 - x^3 - x - 2x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-x^3 - x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-g(x).e^{-x}}{(x^2 + 1)^2}$$

Sur $[0 , + \infty[$, $e^{-x} > 0$ et $(x^2+ 1)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $- g(x)$.

Pour tout x de $[0 , + \infty[$, $f'(x)$ et g(x) sont donc de signes contraires.

b) D'après la question 2 :
Sur $[0 , \alpha[$, g(x) est négative ; donc $f'(0)$ est positive
Sur $]\alpha ; + \infty[$, g(x) est positive ; donc $f'(0)$ est négative

On en déduit les variations de f :
Sur $[0 , \alpha[$, f est croissante et sur $]\alpha ; + \infty[$, f est décroissante

4. a) Pour tout x de $[0 , + \infty[$, on a $\dfrac{x}{x^2 + 1} \geq 0$ car $x \geq 0$ et $x^2 + 1 \geq 0$

Pour tout x de $[0 , + \infty[$, on a : $\dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x - x^2 - 1}{x^2 + 1} = - \dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$

$(x - 1)^2 \geq 0$ et $x^2+ 1 \geq 0$ donc $-\dfrac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \leq 0$

Donc $\dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{2} \leq 0$ soit $\dfrac{x}{x^2 + 1} \leq \dfrac{1}{2}$

Ainsi pour tout x de $[0 , + \infty[$, $0 \leq \dfrac{x}{x^2 + 1} \leq \dfrac{1}{2}$

b) Pour tout x de $[0\,,+\infty[$, $0 \le \dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{1}{2}$

$$0 \le \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \le \frac{1}{2}.e^{-x} \qquad (\text{car } e^{-x} > 0)$$

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{2}.e^{-x}$$

Les fonctions f et $x \mapsto \frac{1}{2}.e^{-x}$ sont continues sur $[0\,,+\infty[$ donc sur $[n\,,2n]$ où n est un entier naturel.

Donc par passage à l'intégrale :

Pour tout entier naturel n $\quad 0 \le \displaystyle\int_n^{2n} f(x)dx \le \int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}dx$

$$0 \le u_n \le \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_n^{2n}$$

$$\mathbf{0 \le u_n \le \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}).}$$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}) = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$