<u>Exercice 1 :</u> (4 points) *Commun à tous les candidats*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. Soit (E) l'ensemble des point M d'affixe z vérifiant : $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

$z \in (E) \Leftrightarrow z - (1 - 2i) = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z - 1 + 2i| = 1$

$\Leftrightarrow$ z appartient au cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1

c. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1

2. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -iz - 2i$.

Soit z' l'image de $-1 - 2i$

$z' = -i(-1 - 2i) - 2i$

$z' = i - 2 - 2i = -2 - i$

Donc **b.** est fausse.

Soit w l'affixe d'un point fixe de f

$$w = -iw - 2i$$
$$w(1 + i) = -2i$$
$$w = \frac{-2i}{1 + i}$$
$$w = \frac{-2i(1 - i)}{2}$$
$$w = -i - 1$$

D'où f admet un unique point fixe d'affixe $-1 - i$

$z' = -iz - 2i \Leftrightarrow z' - (-1 - i) = -iz - 2i - (-1 - i)$

$\Leftrightarrow z' - (-1 - i) = -iz + 1 - i$

$\Leftrightarrow z' - (-1 - i) = -iz - i(1 + i)$

$\Leftrightarrow z' - (-1 - i) = -i(z - (-1 - i))$

$\Leftrightarrow z' - (-1 - i) = e^{-i\pi/2}(z - (-1 - i))$

d. f est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$

Soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = -1 + 2i$ et $z_C = -1 - 2i$.

$M \in (F) \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|$

$M \in (F) \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_C|$

$M \in (F) \Leftrightarrow AM = CM$

c. (F) est la médiatrice du segment [AC].

4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$.

Soit $z = a + ib$

$z + |z|^2 = 7 + i \quad \Leftrightarrow \quad a + ib + a^2 + b^2 = 7 + i$

$z + |z|^2 = 7 + i \quad \Leftrightarrow \quad a + a^2 + b^2 = 7 \text{ et } b = 1$

$z + |z|^2 = 7 + i \quad \Leftrightarrow \quad a + a^2 = 6 \text{ et } b = 1$

$z + |z|^2 = 7 + i \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + a - 6 = 0 \text{ et } b = 1$

Le discriminant du polynôme P tel que $P(a) = a^2 + a - 6$ est 25 donc est positif. Il admet donc deux solutions distinctes : 2 et – 3.

$z + |z|^2 = 7 + i \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 + i \text{ ou } z = -3 + i$

Cette équation admet :

a. Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.

<u>Exercice 2 :</u> (6 points) *Commun à tous les candidats*

Soient f est g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ et $g(x) = x^2 e^{-x}$.

<u>PARTIE A</u>

1) D'après le graphique, f semble être croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) <u>Etudions les variations de f :</u>

f est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0\ ;+\infty[$

f est de la forme $u \times v$ et $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$
$v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$

Donc $\boldsymbol{f'(x)} = e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right) = \boldsymbol{e^{-x}(1-x)}$

$e^{-x} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;+\infty[$ revient à étudier le signe de $1 - x$

$1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$

<u>Etablissons le tableau de variations</u> :

x	0		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(0) = 0 \times e^0 = 0$

$f(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;+\infty[$

<u>Calculons la limite en $+\infty$</u>

$f(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (limite usuelle) donc par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) voir la courbe à la fin de l'exercice

4) La courbe C_f semble être au dessus de C_g sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et C_f semble être en dessous de C_g sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$

<u>Pour le démontrer , on étudie le signe de $f(x) - g(x)$</u>

$f(x) - g(x) = xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(x - x^2) = x(1-x)e^{-x}$

Etudions le signe de x (1 – x) sur [0 ; + ∞ [
Sur [0 ; + ∞[, $x \geqslant 0$

$1 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$

On a le tableau de signes suivant :

x	0	1	+∞
x	+		+
1 – x	+	0	–
f(x) – g(x)	+	0	–
Position de C_f par rapport à C_g	f(x) – g(x) >0 donc C_f est au dessus de C_g		f(x) – g(x) <0 donc C_f est en dessous de C_g

La courbe C_f est au dessus de C_g sur l'intervalle [0 ; 1] et C_f est en dessous de C_g sur l'intervalle [1 ; + ∞[

PARTIE B

1) voir courbe à la fin de l'exercice

2) Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$.

$I = \int_0^1 xe^{-x}dx$

On va calculer cette intégrale à l'aide d'une intégration par parties

On pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x}$, $v(x) = -e^{-x}$

D'où $I = [-x e^{-x}]_1^0 + \int_0^1 e^{-x}dx$

$I = -e^{-1} + 0 - [e^{-x}]_0^1$

$I = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$

$\mathbf{I = 1 - \frac{2}{e}}$

3) Soit H la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par $H(x) = -(x^2 + 2x)e^{-x}$

a. Sur l'intervalle [0 ; + ∞ [, H est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables sur [0 ; + ∞ [
H est de la forme u × v et (uv)' = u'v + uv' avec $u(x) = -x^2 - 2x$, $u'(x) = -2x - 2$
$v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$

Donc $H'(x) = (-2x - 2)e^{-x} + (-x^2 - 2x)(-e^{-x})$

$\Leftrightarrow$ $H'(x) = e^{-x}(-2x - 2 + x^2 + 2x)$

$\Leftrightarrow$ $H'(x) = e^{-x}(x^2 - 2)$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{H'(x) = x^2 e^{-x} - 2e^{-x} = g(x) - 2e^{-x}}$

b. $H'(x) = g(x) - 2\,e^{-x} \Leftrightarrow g(x) = H'(x) + 2\,e^{-x}$

Ainsi $G(x) = H(x) - 2\,e^{-x} + k$ avec k réel

$G(x) = -(x^2 + 2x)\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + k$

$G(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + k$

$\mathbf{G(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + k}$

Une primitive sur l'intervalle [0 ; + ∞[de la fonction g est $G(x) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$

4) D'après la question A 4), $f(x) - g(x) \geq 0$ sur [0 ,1].

Donc $A = \int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right) dx$

$A = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$

$A = I - \int_0^1 g(x)dx$

D'après la question **2**, $I = 1 - \frac{2}{e}$

D'où $A = 1 - \frac{2}{e} - (G(1) - G(0))$

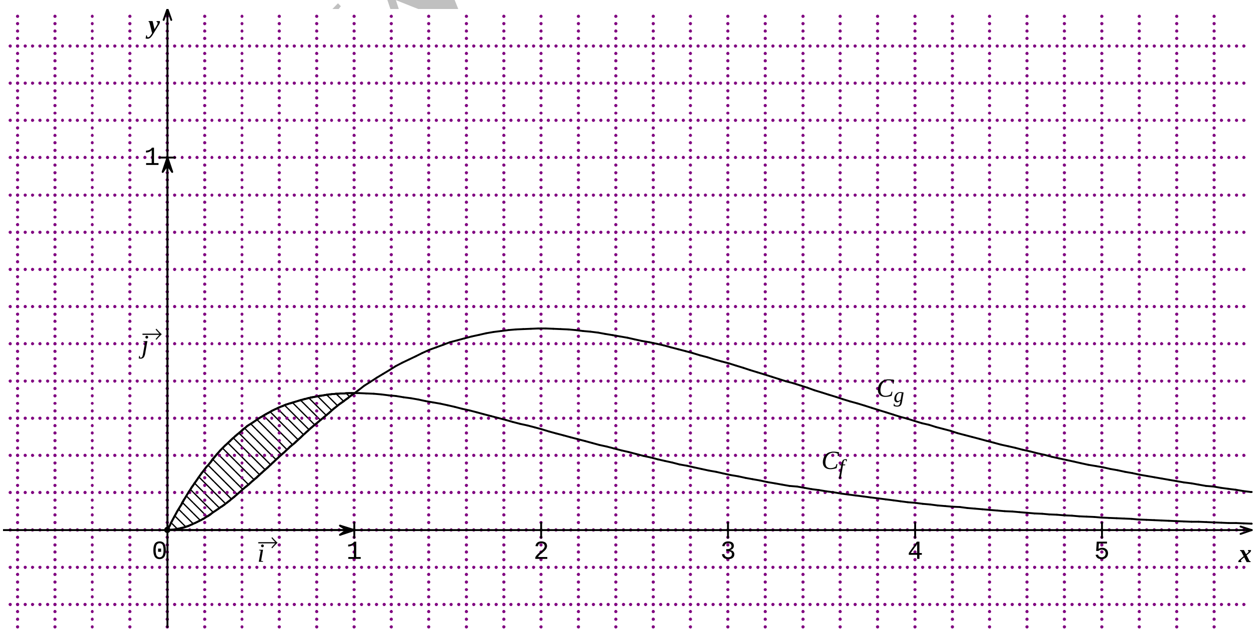
$\Leftrightarrow \quad A = 1 - \frac{2}{e} - \left[\left(-e^{-1}(1 + 2 + 2)\right) - (-e^{0} \times 2)\right]$

$\Leftrightarrow \quad A = 1 - \frac{2}{e} - \left(-\frac{5}{e} + 2\right)$

$\Leftrightarrow \quad A = 1 - \frac{2}{e} + \frac{5}{e} - 2$

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{A = \frac{3}{e} - 1}$

La valeur exacte de l'aire A est $\frac{3}{e} - 1$



<u>Exercice 3 :</u> (5 points) *Commun à tous les candidats*

1. Les probabilités des évènements A et B sont respectivement p(A) = 0,02 et p(B) = 0,01.

a) Calculer la probabilité de l'évènement C « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

$p(C) = p(A \cap B)$

Or A et B sont indépendants, donc :

$p(C) = p(A) \times p(B)$

$p(C) = 0{,}02 \times 0{,}01$

$\boxed{p(C) = 0{,}0002}$

b) Calculer la probabilité de l'évènement D « le sac est défectueux ».

$p(D) = p(A \cup B)$

$p(D) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(D) = 0{,}02 + 0{,}01 - 0{,}0002$

$\boxed{p(D) = 0{,}0298}$

c) Calculer la probabilité de l'évènement E « le sac ne présente aucun défaut ».

E est l'événement contraire de D, d'où :

$p(E) = p(\overline{D})$

$p(E) = 1 - p(D)$

$p(E) = 1 - 0{,}0298$

$\boxed{p(E) = 0{,}9702}$

d) Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p_A(B) = \frac{p(A) \times p(B)}{p(A)} \quad \text{car A et B sont indépendants}$$

$p_A(B) = p(B)$

$\boxed{p_A(B) = 0{,}01}$

2.

a) Les expériences « prendre un sac et regarder s'il est défectueux » sont des expériences identiques et indépendantes (puisqu'il y a remise).
Chacune de ces expériences a deux issues possibles : le succès D de probabilité 0,03 ou l'échec E de probabilité 0,97.
La variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 100 sacs associe le nombre de sacs défectueux suit donc une loi binomiale de $\boxed{\text{paramètres 100 et 0,03}}$.

b) Soit S l'évènement « au moins un sac est défectueux » ?
L'évènement « aucun sac n'est défectueux » est l'événement contraire de « au moins un sac est défectueux »

$p(\overline{S}) = p(X = 0)$

$p(\overline{S}) = \binom{100}{0} 0{,}03^0\ 0{,}97^{100}$

$p(\overline{S}) = 0{,}97^{100}$

$p(\overline{S}) = 0{,}05$ au centième près

$p(S) = 1 - p(\overline{S})$

$\boxed{p(S) = 0{,}95}$

$\boxed{\text{Pour 100 sacs prélevés, il y a 95\% de chances qu'il y ait au moins un sac défectueux}}$.

c) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est

$E(X) = 100 \times 0{,}03$

$\boxed{E(X) = 3}$

$\boxed{\text{En moyenne, pour 100 sacs prélevés, il y a 3 sacs défectueux.}}$

<u>Exercice 4 :</u> (5 points) *Candidats n'ayant suivi pas l'enseignement de spécialité*

Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthogonal $(0 ;\vec{i}, \vec{j},\vec{k})$.

(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A ;

1. (P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A. Un vecteur normal à (P) est donc $\overrightarrow{BC}\,(-1 ; 1 ; 0)$

(P) a pour équation $-x + y + d = 0$ avec d réel à déterminer.
$A \in (P)$ donc $-1 + 2 + d = 0$ soit $d = -1$.

Le plan (P) a pour équation cartésienne $-x + y - 1 = 0$ soit $x - y + 1 = 0$.

2. a) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ z = y - 2 \\ -(y-1) + y - 2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x = t - 1} \\ \mathbf{y = t} \quad \mathbf{t \in \mathbb{R}} \\ \mathbf{z = t - 2} \end{cases}$

b) Pour trouver l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) il faut résoudre le système :
$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t - 2 \end{cases}$
Ce système correspond à **la représentation paramétrique d'une droite**.
En prenant t = 3, on trouve **qu'elle passe par le point E de coordonnées (2 ; 3 ; 1)**

c) La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$.

$\overrightarrow{BC}\,(-1 ; 1 ; 0)$ et $\overrightarrow{BD}\,(-1 ; 0 ; 1)$.

$\vec{u}.\overrightarrow{BC} = 1 \times -1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 0$

$\vec{u}.\overrightarrow{BD} = 1 \times -1 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), $\vec{u}$ est un vecteur normal du plan (BCD).
La droite (d) est orthogonale au plan (BCD).

(BCD) a pour équation cartésienne : $x + y + z + d = 0$.
B appartient au plan (BCD) : $2 + 2 + 0 + d = 0$ soit $d = -4$.

Une équation cartésienne du plan (BCD) est $x + y + z - 4 = 0$.

3. Une équation cartésienne du plan (ABC) parallèle à $(0 ;\vec{i}, \vec{j})$ est **z = 0.**

Une équation cartésienne du plan (ABD) parallèle à $(0 ;\vec{i}, \vec{k})$ est **y = 2.**

Une équation cartésienne du plan (ACD) parallèle à $(0 ;\vec{j}, \vec{k})$ est **x = 1.**

4. a) Soit M (x_M ; y_M ; z_M) un point de (d) alors il existe t réel tel que $\begin{cases} x_M = t - 1 \\ y_M = t \\ z_M = t - 2 \end{cases}$

Calculons la distance de M à chacun des trois plans.

rappel de la formule : $d(M(x_0 ; y_0 ; z_0) ; P (ax + by + cz + d = 0)) = \left|\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

$d(M ; (ABC)) = \left|\dfrac{z_M}{1}\right| = |t - 2|$.

$d(M ; (ABD)) = \left|\dfrac{y_M - 2}{1}\right| = |t - 2|$.

$d(M ; (ABD)) = \left|\dfrac{x_M - 1}{1}\right| = |t - 2|$.

$d(M ; (ABC)) = d(M ; (ABD)) = d(M ; (ABD))$

Tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b) Des points équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) sont les points de la droite (d).

Soit M (x_M ; y_M ; z_M) un point de (d) alors il existe t réel tel que $\begin{cases} x_M = t - 1 \\ y_M = t \\ z_M = t - 2 \end{cases}$

Calculons la distance de M au plan (BCD).

$d(M ; (BCD)) = \left|\dfrac{x_M + y_M + z_M - 4}{\sqrt{3}}\right| = \left|\dfrac{t - 1 + t + t - 2 - 4}{\sqrt{3}}\right| = \left|\dfrac{3t - 7}{\sqrt{3}}\right|$

On cherche M tel que $d(M ; (BCD)) = d(M ; (ABC)) = |t - 2|$.

$\left|\dfrac{3t - 7}{\sqrt{3}}\right| = |t - 2|$

$(3t - 7)^2 = 3(t - 2)^2$

$9t^2 - 42t + 49 = 3t^2 - 12t + 12$

$6t^2 - 30t + 37 = 0$ $\Delta = 12 > 0$. L'équation admet 2 solutions.

Donc il existe au moins deux points de (d) qui sont équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD), et (BCD).

Exercice 4 : (6 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. Soit M le point coordonnées (x ; y ; z).

$MF = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$ soit $MF^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}$

$d(M ; P) = \left|\frac{z + \frac{1}{4}}{1}\right|$ soit $d(M ; P)^2 = \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}$

$MF^2 = d(M ; P)^2 \quad \Leftrightarrow \; x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16} = z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow \; x^2 + y^2 = z$

L'ensemble (S) des points M de coordonnées (x ; y ; z) qui vérifient d(M, P) = MF a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2. **a)** (S) a pour équation $x^2 + y^2 = z$ donc l'intersection cherché vérifie le système :

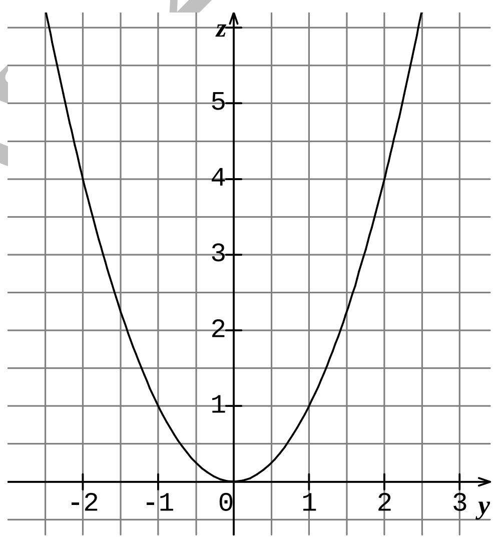
$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

L'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation z = 2 est un cercle (*de centre (0 ; 0 ; 2) et de rayon* $\sqrt{2}$).

b)) (S) a pour équation $x^2 + y^2 = z$ donc l'intersection cherché vérifie le système :

$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$

L'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation x = 0 est l'équation d'une parabole.



3) Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

a) Si $x \equiv 0$ [7] alors $x^2 \equiv 0[7]$
Si $x \equiv 1$ [7] alors $x^2 \equiv 1[7]$
Si $x \equiv 2$ [7] alors $x^2 \equiv 4[7]$
Si $x \equiv 3$ [7] alors $x^2 \equiv 9[7] \equiv 2[7]$
Si $x \equiv 4$ [7] alors $x^2 \equiv 16[7] \equiv 2[7]$
Si $x \equiv 5$ [7] alors $x^2 \equiv 25[7] \equiv 4[7]$
Si $x \equiv 6$ [7] alors $x^2 \equiv 36[7] \equiv 1[7]$

Les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 sont : 0 ; 1 ; 2 et 4.

b) Soit x tel que $x^2 \equiv r$ [7] et y tel que $y^2 \equiv s$ [7].
$x^2 + y^2 \equiv r + s$ [7]
Etudions tous les cas possibles à l'aide du tableau de congruence ci-dessous :

+	**0**	**1**	**2**	**4**
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	$8 \equiv 1$ [7]

Les restes possibles de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 7 sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6

Si 7 divise $x^2 + y^2$ alors $x^2 + y^2 \equiv 0$ [7].
D'après le tableau de congruence ci-dessus le seul cas possible est $x \equiv 0$ [7] et $y \equiv 0$ [7].

<u>Réciproquement</u> si 7 divise x et 7 divise y alors $x \equiv 0$ [7] et $y \equiv 0$ [7]
$x^2 \equiv 0$ [7] et $y^2 \equiv 0$ [7]
$x^2 + y^2 \equiv 0$ [7]

<u>Conclusion</u> : **7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y**

4) Les coordonnées des points appartenant à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation z = 98 vérifient le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 98 \\ z = 98 \end{cases}$
$x^2 + y^2 = 98 = 14 \times 7$
En considérant que x et y sont des entiers naturels, alors 7 divise $x^2 + y^2$ implique 7 divise x et 7 divise y.
x et y sont des multiples de 7.
si x = 0 alors $y^2 = 98$ impossible
si x = 7 alors $y^2 = 98 - 49 = 49$ soit y = 7.
si x = 14 alors $y^2 = 98 - 196 < 0$ impossible.
Si $x \geqslant 14$ alors $y^2 \leq 0$ impossible.

Il existe un point qui appartient à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation z = 98 et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels : M(7 ; 7; 98).