

Exercice 1 : (5 points) Commun à tous les candidats1. a) Limite de la fonction f en $-\infty$: $f(x) = x^2 e^{-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{donc par produit} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Limite de la fonction f en $+\infty$: $f(x) = x^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b) Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur \mathbb{R} . Donc par produit de fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout réel } x : \quad f'(x) &= 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) \\ f'(x) &= xe^{-x}(-x + 2) \end{aligned}$$

Sur \mathbb{R} , $e^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x(-x + 2)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	0	+	+
$-x + 2$	+		0	-
$x(-x + 2)$	-	0	+	0

Donc :

Sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$, $f'(x)$ est négative,
donc f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$ Sur $]0 ; 2[$, $f'(x)$ est positive,
donc f est croissante sur $]0 ; 2[$.Pour $x = 0$ et $x = 2$, $f'(x) = 0$,
donc f admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 0$
donc f admet un maximum en 2 qui vaut $f(2) = 4e^{-2}$ Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	-		+	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$4e^{-2}$	0

c) Sur $]-\infty ; 2[$, f admet un minimum en 0 qui vaut 0.Sur $]2 ; +\infty[$, f est décroissante à valeur dans $]0 ; 4e^{-2}[$.**On en déduit que \mathbb{R}^* , f est strictement positive et que pour $x = 0$, f est nulle.**2. a) Sur \mathbb{R}^* f est strictement positive et que pour $x = 0$, f est nulle.

Donc :

Si $a > 0$, alors $I(a)$ est strictement positive**Si $a = 0$, alors $I(a)$ est nulle****Si $a < 0$, alors $I(a)$ est strictement négative**

b) Pour tout nombre réel a : $I(a) = \int_0^a x^2 e^{-x} dx$

Posons : $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{-x}$
 $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -e^{-x}$

Les fonctions u et v sont continues sur $[0 ; a]$ à dérivées continues sur $]0 ; a[$.

Donc par intégrations par parties :

$$I(a) = \left[-x^2 e^{-x} \right]_0^a - \int_0^a -2xe^{-x} dx$$

$$I(a) = -a^2 e^{-a} + 2 \int_0^a x e^{-x} dx$$

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$
 $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

Les fonctions u et v sont continues sur $[0 ; a]$ à dérivées continues sur $]0 ; a[$.

De nouveau par intégrations par parties :

$$I(a) = -a^2 e^{-a} + 2 \left(\left[-x e^{-x} \right]_0^a - \int_0^a -e^{-x} dx \right)$$

$$I(a) = -a^2 e^{-a} + 2 \left[-x e^{-x} \right]_0^a - 2 \left[e^{-x} \right]_0^a$$

$$I(a) = -a^2 e^{-a} - 2a e^{-a} - 2e^{-a} + 2$$

$$I(a) = 2 - 2e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

c) Pour tout nombre réel a :

$$\frac{1}{2} e^a I(a) = \frac{1}{2} e^a \left(2 - 2e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right) \right)$$

$$\frac{1}{2} e^a I(a) = e^a \left(1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right) \right)$$

$$\frac{1}{2} e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

3. a) Tangente à C au point d'abscisse 0 : $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$
 $g(0) = e^0 = 1$ $g'(x) = e^x$ donc $g'(0) = 1$

$$y = x + 1$$

Tangente à P au point d'abscisse 0 : $y = h'(0)(x - 0) + h(0)$

$$h(0) = 1 + 0 + 0 = 1 \quad h'(x) = 1 + x \text{ donc } h'(0) = 1$$

$$y = x + 1$$

Donc les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b) Pour tout nombre réel a : $g(a) - h(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$

$$g(a) - h(a) = \frac{1}{2} e^a I(a) \quad (\text{question précédente}).$$

Comme sur \mathbb{R} $e^a > 0$, le signe de $g(a) - h(a)$ est le même que celui de $I(a)$.

Donc d'après la question 2.a. on en déduit que :

Si $a > 0$, alors $I(a)$ est strictement positive, donc C est au dessus de P sur $]0 ; +\infty[$

Si $a = 0$, alors $I(a)$ est nulle, donc C et P se coupent en 0

Si $a < 0$, alors $I(a)$ est strictement négative donc C est au dessous de P sur $]-\infty ; 0[$.

Exercice 2 : (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. a) Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis donc :

$$p(T_1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p(P_1) = \frac{1}{2}$$

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3 donc :

$$p_{T_1}(T_2) = 0,3$$

Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 donc :

$$p_{P_1}(P_2) = 0,8 \quad \text{donc} \quad p_{P_1}(T_2) = 1 - p_{P_1}(P_2) = 0,2$$

b) Les événements T_1 et P_1 forment une partition de l'univers, donc d'après la formules des probabilités totales :

$$p(T_2) = p(T_2 \cap T_1) + p(T_2 \cap P_1)$$

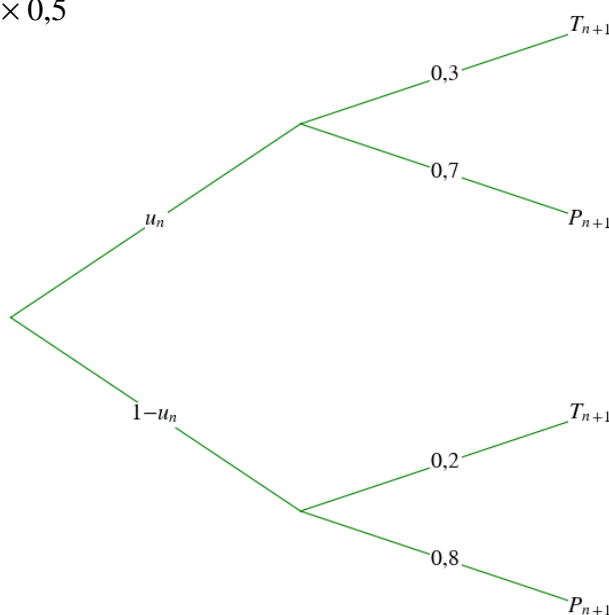
$$p(T_2) = p_{T_1}(T_2) \times p(T_1) + p_{P_1}(T_2) \times p(P_1)$$

$$p(T_2) = 0,3 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5$$

$$p(T_2) = 0,25$$

$$p(T_2) = \frac{1}{4}$$

c) Arbre :



d) Les événement T_n et P_n forment une partition de l'univers, donc d'après la formules des probabilités totales :

$$p(T_{n+1}) = p(T_{n+1} \cap T_n) + p(T_{n+1} \cap P_n)$$

$$p(T_{n+1}) = p_{T_n}(T_{n+1}) \times p(T_n) + p_{P_n}(T_{n+1}) \times p(P_n)$$

$$p(T_{n+1}) = 0,3 \times p(T_n) + 0,2 \times (1 - p(T_n)) \quad \text{car} \quad p(P_n) = 1 - p(T_n)$$

$$p(T_{n+1}) = 0,1p(T_n) + 0,2$$

$$p(T_{n+1}) = u_{n+1} \quad \text{et} \quad p(T_n) = u_n$$

Donc pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

e) À l'aide de la calculatrice :

n	1	2	3	4	5	...	11	12
u_n	0,5	0,25	0,225	0,2225	0,22225	0,222...25	0,2222222222	0,2222222222

A partir de $n = 11$, la valeur arrondie ne change plus 0,2222222222.

On peut donc émettre la conjecture que la limite de la suite (u_n) est 0,22222... (nombre illimité de 2)

2. a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9}$.

$$v_{n+1} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}u_n + \frac{2}{10} - \frac{2}{9}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}\left(v_n + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{45}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}v_n + \frac{1}{45} - \frac{1}{45}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$.

b) La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ donc :

$$v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{soit} \quad v_n = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$ alors $u_n = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{10} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{9}$

On a $\frac{2}{9} = 0,222\dots$ ce résultat permet de valider la conjecture émise en 1. e)

Exercice 2 : (5 points)*Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. a) $3 \times (-2) + 7 \times 1 = -6 + 7 = 1$

Le couple $(-2 ; 1)$ est solution de l'équation $3u + 7v = 1$.

$$3 \times (-2) + 7 \times 1 = 1$$

$$3 \times (-2) \times 10^{2n} + 7 \times 1 \times 10^{2n} = 10^{2n}$$

Une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de l'équation (E) est $(-2 \cdot 10^{2n} ; 10^{2n})$.

b) Soient (x, y) un couple d'entiers relatifs solution de (E).

$$(E) : 3x + 7y = 10^{2n}$$

$$3x + 7y = 3 \times (-2 \cdot 10^{2n}) + 7 \times 10^{2n}$$

$$3(x + 2 \cdot 10^{2n}) = 7(10^{2n} - y)$$

Or 3 et 7 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :

$$3 \text{ divise } (10^{2n} - y) \text{ et } 7 \text{ divise } (x + 2 \cdot 10^{2n})$$

Il existe donc un entier relatif k tel que : $10^{2n} - y = 3k$ et $x + 2 \cdot 10^{2n} = 7k$
 $y = 10^{2n} - 3k$ et $x = 7k - 2 \cdot 10^{2n}$

On a démontré que si (x, y) un couple d'entiers relatifs est solution de (E) alors il existe un entier relatif k tel que $y = 10^{2n} - 3k$ et $x = 7k - 2 \cdot 10^{2n}$.

Réciproquement : pour tout entier relatif k , le couple $(7k - 2 \cdot 10^{2n} ; 10^{2n} - 3k)$ est solution de (E).

En effet : $3 \times (7k - 2 \cdot 10^{2n}) + 7 \times (10^{2n} - 3k) = 21k - 6 \cdot 10^{2n} + 7 \cdot 10^{2n} - 21k = 10^{2n}$.

Conclusion : L'ensemble des solutions dans \mathbb{Z}^2 de l'équation (E) est :

$$\{(7k - 2 \cdot 10^{2n} ; 10^{2n} - 3k) ; k \in \mathbb{Z}\}$$

2. a) $7 \times 14 = 98$ donc $100 = 7 \times 14 + 2 \equiv 2 \pmod{7}$.

soit $(x ; y)$ un couple de relatifs solution de (G)

$$\text{alors } 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$$

$$\text{alors } 3x^2 = 10^{2n} - 7y^2$$

$$\text{alors } 3x^2 \equiv 10^{2n} \pmod{7}$$

$$\text{alors } 3x^2 \equiv 100^n \pmod{7}$$

$$\text{alors } 3x^2 = 2^n \pmod{7}$$

b)

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.	0	3	5	6	6	5	3

$$\begin{aligned}x &\equiv 0 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 0 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 0 \pmod{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\equiv 1 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 1 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 4 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 12 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 5 \pmod{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\equiv 3 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 9 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 2 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 6 \pmod{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\equiv 4 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 16 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 2 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 6 \pmod{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\equiv 5 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 25 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 4 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 12 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 5 \pmod{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &\equiv 6 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 36 \pmod{7} \\x^2 &\equiv 1 \pmod{7} \\3x^2 &\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}2 &\equiv 2 \pmod{7} \\2^2 &\equiv 4 \pmod{7} \\2^3 &\equiv 1 \pmod{7} \\2^4 &= 2^3 \times 2 \equiv 2 \pmod{7} \dots\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}2^n &\equiv 2 \text{ si } n \equiv 1 \pmod{3} \\2^n &\equiv 4 \text{ si } n \equiv 2 \pmod{3} \\2^n &\equiv 1 \text{ si } n \equiv 0 \pmod{3}\end{aligned}$$

2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

Si $(x ; y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$

Or $3x^2$ est congru à 0 ; 3 ; 5 et 6 (modulo 7)

et 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7

L'équation $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ n'admet donc pas de solution.

L'équation (G) n'admet pas non plus de solution.

Exercice 3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

1. Coordonnées de B (1 ; 0 ; 0) ; de C (1 ; 1 ; 0) et I milieu de [BC].

$$\text{Donc I a pour coordonnées : } \left(\frac{1+1}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{0+0}{2} \right) \text{ soit } \left(1 ; \frac{1}{2} ; 0 \right)$$

Coordonnées de B (1 ; 0 ; 0) ; de F (1 ; 0 ; 1) et J milieu de [BF].

$$\text{Donc J a pour coordonnées : } \left(\frac{1+1}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{0+1}{2} \right) \text{ soit } \left(1 ; 0 ; \frac{1}{2} \right)$$

Coordonnées de H (0 ; 1 ; 1) ; de F (1 ; 0 ; 1) et K milieu de [HF].

$$\text{Donc K a pour coordonnées : } \left(\frac{0+1}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{1+1}{2} \right) \text{ soit } \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1 \right)$$

2. Coordonnées de \overrightarrow{IK} : $\left(\frac{1}{2} - 1 ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} ; 1 - 0 \right)$ soit $\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; 1 \right)$

$$\text{Coordonnées de } \overrightarrow{IJ} : \left(1 - 1 ; 0 - \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} - 0 \right) \text{ soit } \left(0 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{IK} = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) + 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

Donc le vecteur \overrightarrow{n} (2 ; 1 ; 1) est orthogonal à \overrightarrow{IK} et à \overrightarrow{IJ} .

Les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{IK} et \overrightarrow{IJ} ne sont pas proportionnelles, donc \overrightarrow{IK} et \overrightarrow{IJ} ne sont pas colinéaires.

Le vecteur \overrightarrow{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), c'est donc un vecteur normal au plan (IJK).

Une équation du plan (IJK) est donc $2x + y + z + d = 0$ avec d réel.

Le point I appartient au plan (IJK) donc :

$$2 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + d = 0 \text{ soit } d = -\frac{5}{2}$$

Une équation du plan (IJK) est : $2x + y + z - \frac{5}{2} = 0$.

En multipliant les coefficients par une autre **équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.**

3. a) Coordonnées de \overrightarrow{DC} : (1 ; 0 ; 0)

La droite (CD) a pour vecteur directeur \overrightarrow{DC} et passe par C (1 ; 1 ; 0).

Une représentation paramétrique de la droite (DC) est :
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

b) Une représentation paramétrique de la droite (DC) est :
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

Une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

Donc les coordonnées de R vérifient :
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4t + 4 + 2 + 0 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = -1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = -1/4 \end{cases}$$

Le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}; 1; 0\right)$.

c) Voir figure

4. Pour tracer la section du cube par le plan (IJK) il faut tracer les intersections du plan (IJK) avec les faces du cube.

Intersection avec la face BCGF : c'est le segment [IJ].

Intersection avec la face ABCD : c'est le segment [IR].

Intersection avec la face EFGH :

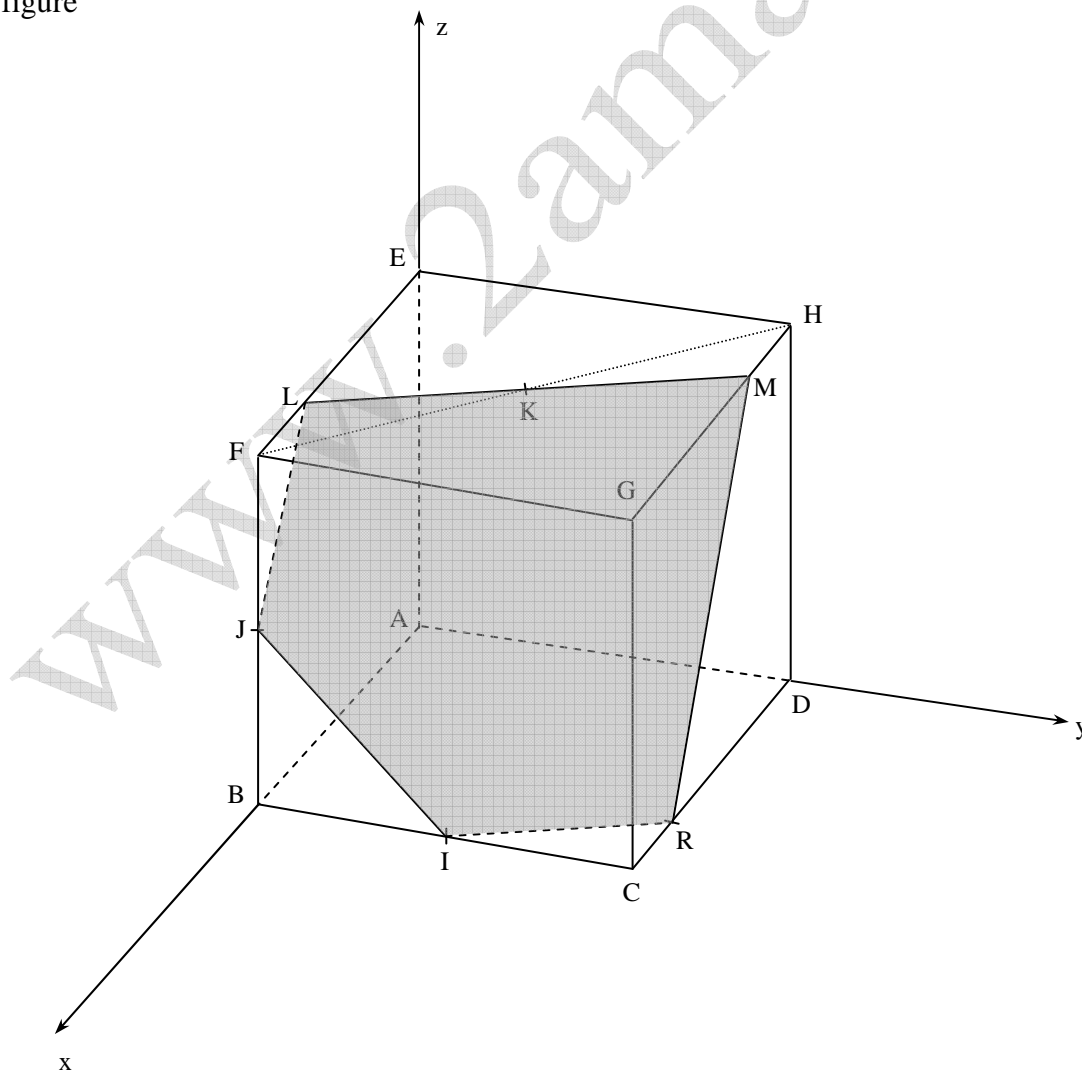
La face EFGH est parallèle à la face ABCD, donc l'intersection sera parallèle à (IR).

Comme le point K appartient à la face EFGF, il faut donc tracer la parallèle à (IR) passant par K. Cette droite coupe alors les segments [EF] en un point L et [GH] en un point M.

Intersection avec la face ABFE : c'est le segment [JL].

Intersection avec la face CDHG : c'est le segment [MR].

Voir figure



5. a) Coordonnées de G : (1 : 1 : 1)

Distance du point G au plan (IJK) est :

$$D(G, (IJK)) = \frac{|4 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

La distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

b) F(1 ; 0 ; 1) G(1 : 1 : 1)

Rayon de la sphère S : GF = 1

La distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4} < 1$.

Donc la sphère S et le plan (IJK) sont sécants.

Leur intersection est un cercle, dont le centre Ω est le projeté orthogonal de G sur le plan (IJK).

Soit N un point de ce cercle.

Le triangle $G\Omega N$ est rectangle en Ω .

D'après le théorème de Pythagore : $GN^2 = G\Omega^2 + \Omega N^2$

GN est égale au rayon de la sphère S soit 1.

$G\Omega$ est égale à la distance du point G au plan (IJK) soit $\frac{\sqrt{6}}{4}$

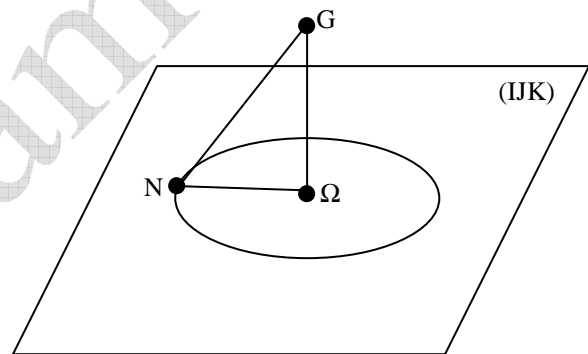
ΩN est le rayon du cercle d'intersection.

Donc $\Omega N^2 = GN^2 - G\Omega^2$

$$\Omega N^2 = 1 - \frac{6}{16}$$

$$\Omega N^2 = \frac{10}{16}$$

$$\Omega N = \frac{\sqrt{10}}{4}$$



Exercice 4 : (6 points) Commun à tous les candidats

1. a) $z_A = 1 + i\sqrt{3}$
 $|z_A| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ donc $z_A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\arg z_A = \frac{\pi}{3}$
 Donc $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
 $z_B = 2i$ donc $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) Voir figure en fin d'exercice

c) $|z_A| = OA = 2$ et $|z_B| = OB = 2$
 Donc $OA = OB$. **Le triangle OAB est donc isocèle en O.**

2. a) $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Un argument du quotient $\frac{z_A}{z_B}$ est $-\frac{\pi}{6}$.

Or $\arg \frac{z_A}{z_B} = (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA})$ Donc $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{6}$

b) La rotation transforme A en B donc l'angle de la rotation est : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6}$

L'écriture complexe de la rotation r est : $z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z$.

3. a) On sait que $OA = OB$, donc les cercles Γ et Γ' ont le même rayon.
 Comme l'image de A par r est B, alors on en déduit que **le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.**

b) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

c) $C \in \Gamma$ donc $AC = AO$ et $C \in \Gamma'$ donc $BC = BO$
 Donc $AC = BC = OA = OB$.

Le quadrilatère OACB possède 4 côtés égaux, **c'est donc un losange.**

d) Comme OACB est un losange, ses diagonales ont le même milieu.
 I étant le milieu de [AB], alors **I est le milieu de [OC].**

Donc $z_I = \frac{z_O + z_C}{2}$ soit $z_C = 2z_I$ soit $z_C = 1 + (2 + \sqrt{3})i$.

$$4. a) \quad AD = |z_D - z_A| = |2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Le rayon du cercle Γ étant égal à $OA = 2$, on en déduit que **le point D appartient au cercle Γ** .
Voir Figure :

Pour placer D : c'est le point d'intersection entre le cercle Γ et l'axe des imaginaires purs car D est un imaginaire pur.

b) Pour placer D'.

D' est l'image de D par la rotation r , donc D' appartient au cercle de centre O passant par D.

Comme D est un point du cercle Γ , alors D' est un point du cercle Γ' , car le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r .

Ces deux cercles se coupent en deux points.

D' est le point d'intersection tel que $(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OD'}) = \frac{\pi}{6}$

Voir figure.

D' est l'image de D par la rotation r donc :

$$z_{D'} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times 2i\sqrt{3}$$

$$z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i$$

$$5. \quad \text{affiche de } \overrightarrow{DC} : z_C - z_D = 1 + (2 + \sqrt{3})i - 2i\sqrt{3} = 1 + (2 - \sqrt{3})i$$

$$\text{affiche de } \overrightarrow{DD'} : z_{D'} - z_D = -\sqrt{3} + 3i - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i$$

$$\text{an factorisant : } -\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i = -\sqrt{3} \left(1 + \left(2 - i\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\sqrt{3} (1 + (2 - \sqrt{3})i)$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3} \overrightarrow{DC}$$

Les vecteurs \overrightarrow{DC} et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires, donc les points C, D, D' sont alignés.

