**Exercice 1 : (5 points)** *Commun à tous les candidats*

**1. a)** Limite de la fonction $f$ en $-\infty$ : $f(x) = x^2e^{-x}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par produit $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

Limite de la fonction $f$ en $+\infty$ : $f(x) = x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

**b)** Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc par produit de fonctions dérivables, la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x : $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x})$

$\boldsymbol{f'(x) = xe^{-x}(-x + 2)}$

Sur $\mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x(-x + 2)$

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | – | 0 | + | | + | |
| $-x + 2$ | | + | | + | 0 | – | |
| $x(-x + 2)$ | | – | 0 | + | 0 | – | |

Donc :

Sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$ $f'(x)$ est négative,

donc $f$ est décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]2 ; +\infty[$

Sur $]0 ; 2[$, $f'(x)$ est positive,

donc $f$ est croissante sur $]0 ; 2[$.

Pour $x = 0$ et $x = 2$, $f'(x) = 0$,

donc $f$ admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 0$

donc $f$ admet un maximum en 2 qui vaut $f(2) = 4e^{-2}$

Tableau de variations de $f$ :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | – | | + | | – | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | 0 |

**c)** Sur $]-\infty ; 2[$, $f$ admet un minimum en 0 qui vaut 0.

Sur $[2 ; +\infty[$, $f$ est décroissante à valeur dans $]0 ; 4e^{-2}]$.

**On en déduit que $\mathbb{R}^*$, $f$ est strictement positive et que pour x = 0, $f$ est nulle.**

**2. a)** Sur $\mathbb{R}^*$ $f$ est strictement positive et que pour x = 0, $f$ est nulle.

Donc :

**Si a > 0, alors I(a) est strictement positive**

**Si a = 0, alors I(a) est nulle**

**Si a < 0, alors I(a) est strictement négative**

**b)** Pour tout nombre réel a : I (a) = $\int_0^a x^2e^{-x}dx$

Posons : $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 2x$ et $v(x) = -e^{-x}$

Les fonctions u et v sont continues sur [0 ; a] à dérivées continues sur [0 ; a].
Donc par intégrations par parties :

$$I(a) = \left[-x^2e^{-x}\right]_0^a - \int_0^a -2xe^{-x}dx$$

$$I(a) = -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}dx$$

Posons : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

Les fonctions u et v sont continues sur [0 ; a] à dérivées continues sur [0 ; a].
De nouveau par intégrations par parties :

$$I(a) = -a^2e^{-a} + 2\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^a - \int_0^a -e^{-x}dx\right)$$

$$I(a) = -a^2e^{-a} + 2\left[-xe^{-x}\right]_0^a - 2\left[e^{-x}\right]_0^a$$

$$I(a) = -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 2e^{-a} + 2$$

$$\mathbf{I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).}$$

**c)** Pour tout nombre réel a :

$$\frac{1}{2}e^a I(a) = \frac{1}{2}e^a\left(2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a\left(1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)\right)$$

$$\mathbf{\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).}$$

**3. a)** Tangente à *C* au point d'abscisse 0 : $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$
$g(0) = e^0 = 1$ $g'(x) = e^x$ donc $g'(0) = 1$
$y = x + 1$

Tangente à *P* au point d'abscisse 0 : $y = h'(0)(x - 0) + h(0)$
$h(0) = 1 + 0 + 0 = 1$ $h'(x) = 1 + x$ donc $h'(0) = 1$
$y = x + 1$

**Donc les courbes *C* et *P* ont la même tangente au point d'abscisse 0.**

**b)** Pour tout nombre réel a : $g(a) - h(a) = \mathbf{e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)}$.

$g(a) - h(a) = \mathbf{\frac{1}{2}e^a I(a)}$ **(question précédente).**

Comme sur R $e^a > 0$ , le signe de g(a) – h(a) est le même que celui de I(a).
Donc d'après la question 2.a. on en déduit que :
**Si a > 0, alors I(a) est strictement positive, donc *C* est au dessus de *P* sur ]0 ; + ∞[**
**Si a = 0, alors I(a) est nulle, donc *C* et *P* se coupent en 0**
**Si a < 0, alors I(a) est strictement négative donc *C* est au dessous de *P* sur ]– ∞ ; 0[.**

**<u>Exercice 2 :</u> (5 points)** *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

**1. a)** Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis donc :

$$\mathbf{p(T_1) = \frac{1}{2}} \qquad \textbf{et} \qquad \mathbf{p(P_1) = \frac{1}{2}}$$

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3 donc :

$$\mathbf{p_{T_1}(T_2) = 0{,}3}$$

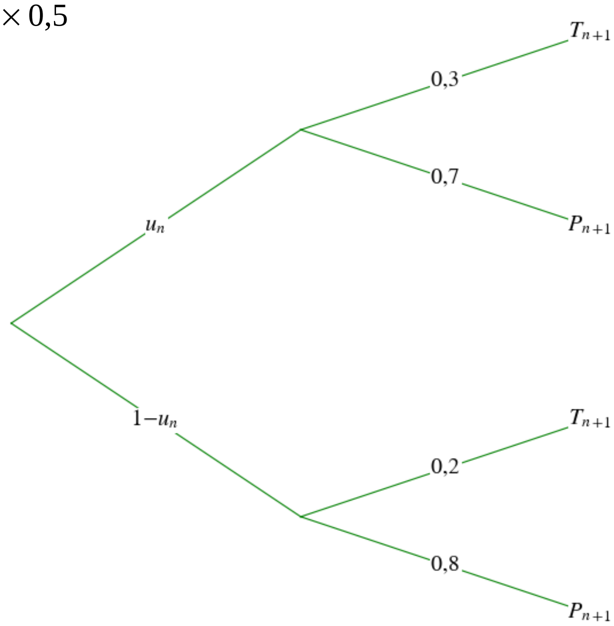
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 donc :

$$p_{P_1}(P_2) = 0{,}8 \quad \text{donc} \qquad \mathbf{p_{P_1}(T_2) = 1 - p_{P_1}(P_2) = 0{,}2}$$

**b)** Les événements $T_1$ et $P_1$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formules des probabilités totales :

$p(T_2) = p(T_2 \cap T_1) + p(T_2 \cap P_1)$
$p(T_2) = p_{T_1}(T_2) \times p(T_1) + p_{P_1}(T_2) \times p(P_1)$
$p(T_2) = 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}5$
$p(T_2) = 0{,}25$
$\mathbf{p(T_2) = \frac{1}{4}}$.

**c)** Arbre :




**d)** Les événement $T_n$ et $P_n$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formules des probabilités totales :

$p(T_{n+1}) = p(T_{n+1} \cap T_n) + p(T_{n+1} \cap P_n)$
$p(T_{n+1}) = p_{T_n}(T_{n+1}) \times p(T_n) + p_{P_n}(T_{n+1}) \times p(P_n)$
$p(T_{n+1}) = 0{,}3 \times p(T_n) + 0{,}2 \times (1 - p(T_n))$ car $p(P_n) = 1 - p(T_n)$
$p(T_{n+1}) = 0{,}1p(T_n) + 0{,}2$
$p(T_{n+1}) = u_{n+1}$ et $p(T_n) = u_n$

**Donc pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.**

**e)** À l'aide de la calculatrice :

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0,5 | 0,25 | 0,225 | 0,2225 | 0,22225 | 0,222…25 | 0,2222222222 | 0,2222222222 |

A partir de n = 11, la valeur arrondie ne change plus 0,22222222222.
**On peut donc émettre la conjecture que la limite de la suite $(u_n)$ est 0,222222… (nombre illimité de 2)**

**2. a)** Pour tout entier naturel $n \geq 1$ : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9}$.

$$v_{n+1} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9}.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}u_n + \frac{2}{10} - \frac{2}{9}.$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}\left(v_n + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{45}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}v_n + \frac{1}{45} - \frac{1}{45}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}v_n$$

**Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$.**

**b)** La suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ donc :

$$v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{soit} \quad \mathbf{v_n = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}}$$

Comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$ alors $\mathbf{u_n = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \frac{2}{9}}$

**c)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{10} < 1$ donc $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{9}}$

On a $\frac{2}{9} = 0,222\ldots$ **ce résultat permet de valider la conjecture émise en 1. e)**

**<u>Exercice 2 :</u> (5 points)** *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

**1. a)** $3 \times (-2) + 7 \times 1 = -6 + 7 = 1$

**Le couple $(-2\ ;\ 1)$ est solution de l'équation $3u + 7v = 1$.**

$3 \times (-2) + 7 \times 1 = 1$
$3 \times (-2) \times 10^{2n} + 7 \times 1 \times 10^{2n} = 10^{2n}$

**Une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de l'équation (E) est $(-2.10^{2n}\ ;\ 10^{2n})$.**

**b)** Soient $(x , y)$ un couple d'entiers relatifs solution de (E).

(E) : $3x + 7y = 10^{2n}$
$3x + 7y = 3 \times (-2.10^{2n}) + 7 \times 10^{2n}$
$3(x + 2.10^{2n}) = 7(10^{2n} - y)$

Or 3 et 7 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss :
3 divise $(10^{2n} - y)$ et 7 divise $(x + 2.10^{2n})$
Il existe donc un entier relatif k tel que : $10^{2n} - y = 3k$ et $x + 2.10^{2n} = 7k$
$y = 10^{2n} - 3k$ et $x = 7k - 2.10^{2n}$

On a démontrer que si $(x , y)$ un couple d'entiers relatifs est solution de (E) alors il existe un entier relatif k tel que $y = 10^{2n} - 3k$ et $x = 7k - 2.10^{2n}$.

<u>Réciproquement</u> : pour tout entier relatif k, le couple $(7k - 2.10^{2n}\ ;\ 10^{2n} - 3k)$ est solution de (E).
En effet : $3 \times (7k - 2.10^{2n}) + 7 \times (10^{2n} - 3k) = 21k - 6.10^{2n} + 7.10^{2n} - 21k = 10^{2n}$.

**<u>Conclusion</u> : L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) est :**
**$\{ (7k - 2.10^{2n}\ ;\ 10^{2n} - 3k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$**

**2. a)** $7 \times 14 = 98$ donc $100 = 7 \times 14 + 2 \equiv 2$ (modulo 7).

soit $(x\ ;\ y)$ un couple de relatifs solution de (G)

alors $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$
alors $3x^2 = 10^{2n} - 7y^2$
alors $3x^2 \equiv 10^{2n}$ (modulo 7)
alors $3x^2 \equiv 100^n$ (modulo 7)
**alors $3x^2 = 2^n$ (modulo 7)**

**b)**

| Reste de la division euclidienne de x par 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7. | **0** | **3** | **5** | **6** | **6** | **5** | **3** |

$x \equiv 0$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 0$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 0$ (modulo 7)

$x \equiv 1$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 1$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 3$ (modulo 7)

$x \equiv 2$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 4$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 12$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 5$ (modulo 7)

$x \equiv 3$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 9$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 2$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 6$ (modulo 7)

$x \equiv 4$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 16$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 2$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 6$ (modulo 7)

$x \equiv 5$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 25$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 4$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 12$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 5$ (modulo 7)

$x \equiv 6$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 36$ (modulo 7)
$x^2 \equiv 1$ (modulo 7)
$3x^2 \equiv 3$ (modulo 7)

**c)** $2 \equiv 2$ (modulo 7)
$2^2 \equiv 4$ (modulo 7)
$2^3 \equiv 1$ (modulo 7)
$2^4 = 2^3 \times 2 \equiv 2$ (modulo 7) .....

On en déduit que $2^n \equiv 2$ si $n \equiv 1$ (modulo 3)
$2^n \equiv 4$ si $n \equiv 2$ (modulo 3)
$2^n \equiv 1$ si $n \equiv 0$ (modulo 3)

**$2^n$ est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.**

Si (x ; y) est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7)
Or $3x^2$ est congru à 0 ; 3 ; 5 et 6 (modulo 7)
et $2^n$ est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7
L'équation $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7) n'admet donc pas de solution.

**L'équation (G) n'admet pas non plus de solution.**

**<u>Exercice 3</u> : (5 points)** *Commun à tous les candidats*

**1.** Coordonnées de B (1 ; 0 ; 0) ; de C (1 ; 1 ; 0) et I milieu de [BC].

**Donc I a pour coordonnées :** $\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{0+0}{2}\right)$ **soit** $\left(1 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$

Coordonnées de B (1 ; 0 ; 0) ; de F (1 ; 0 ; 1) et J milieu de [BF].

**Donc J a pour coordonnées :** $\left(\frac{1+1}{2} ; \frac{0+0}{2} ; \frac{0+1}{2}\right)$ **soit** $\left(1 ; 0 ; \frac{1}{2}\right)$

Coordonnées de H (0 ; 1 ; 1) ; de F (1 ; 0 ; 1) et K milieu de [HF].

**Donc K a pour coordonnées :** $\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{1+0}{2} ; \frac{1+1}{2}\right)$ **soit** $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

**2.** Coordonnées de $\overrightarrow{IK}$ : $\left(\frac{1}{2} - 1 ; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} ; 1 - 0\right)$ soit $\left(-\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$

Coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ : $\left(1 - 1 ; 0 - \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} - 0\right)$ soit $\left(0 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$\vec{n}.\overrightarrow{IK} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{IJ} = 2 \times 0 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} = 0$

**Donc le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 1) est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.**

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires.
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), c'est donc un vecteur normal au plan (IJK).
Une équation du plan (IJK) est donc 2x + y + z + d = 0 avec d réel.
Le point I appartient au plan (IJK) donc :

$$2 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + d = 0 \text{ soit } d = -\frac{5}{2}$$

Une équation du plan (IJK) est : $2x + y + z - \frac{5}{2} = 0$.

En multipliant les coefficients par une autre **équation du plan (IJK) est : 4x + 2y + 2z − 5 = 0.**

**3. a)** Coordonnées de $\overrightarrow{DC}$ : (1 ; 0 ; 0)

La droite (CD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DC}$ et passe par C (1 ; 1 ; 0).

**Une représentation paramétrique de la droite (DC) est :** $\begin{cases} \mathbf{x = t + 1} \\ \mathbf{y = 1} \\ \mathbf{z = 0} \end{cases}$ **, avec t ∈ ℝ.**

**b)** Une représentation paramétrique de la droite (DC) est : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ , avec t ∈ ℝ.

Une équation du plan (IJK) est : 4x + 2y + 2z − 5 = 0.

Donc les coordonnées de R vérifient : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ 4t + 4 + 2 + 0 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = -1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t = -1/4 \end{cases}$$

**Le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4} ; 1 ; 0\right)$.**

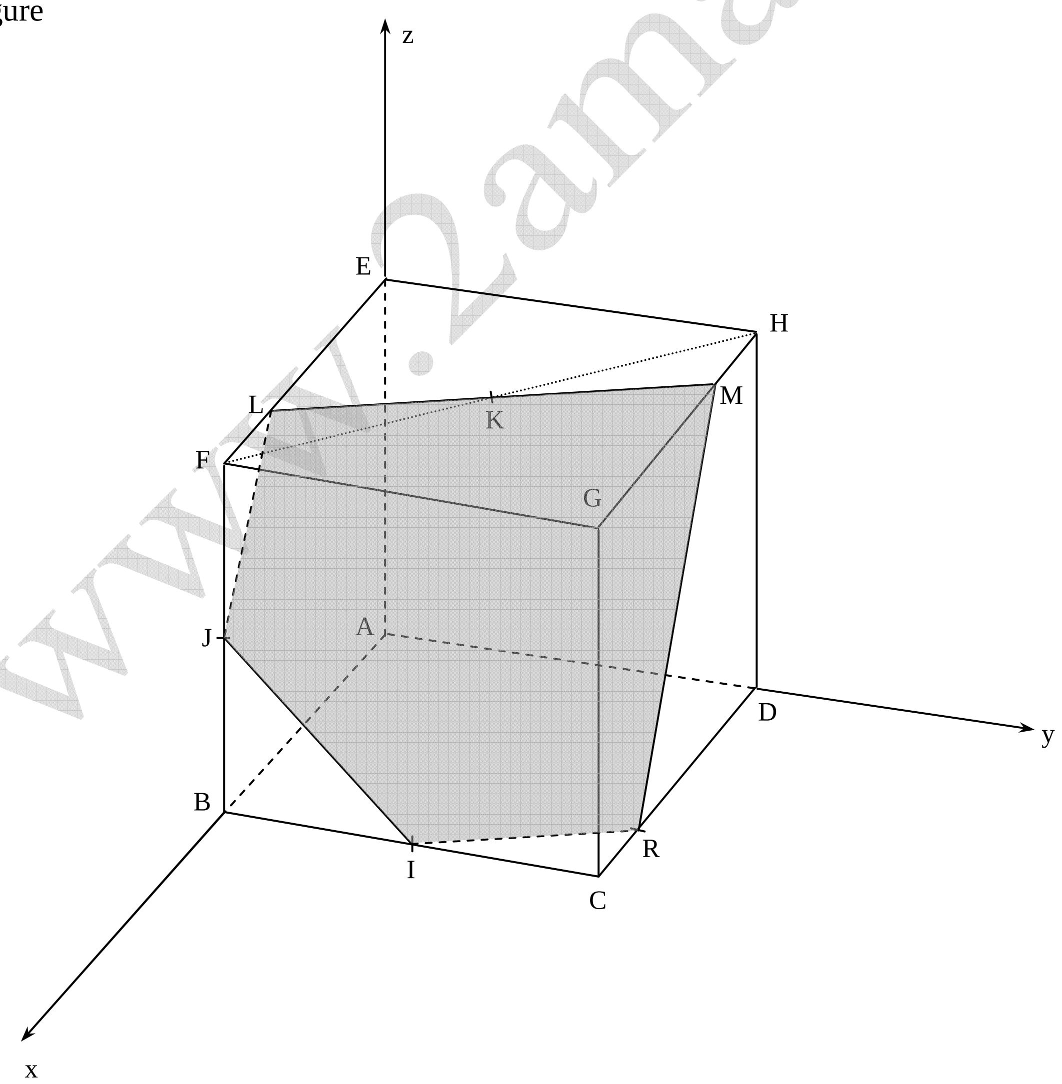
**c)** Voir figure

**4.** Pour tracer la section du cube par le plan (IJK) il faut tracer les intersections du plan (IJK) avec les faces du cube.
Intersection avec la face BCGF : c'est le segment [IJ].
Intersection avec la face ABCD : c'est le segment [IR].
Intersection avec la face EFGH :

La face EFGH est parallèle à la face ABCD, donc l'intersection sera parallèle à (IR). Comme le point K appartient à la face EFGF, il faut donc tracer la parallèle à (IR) passant par K. Cette droite coupe alors les segments [EF] en un point L et [GH] en un point M.

Intersection avec la face ABFE : c'est le segment [JL]
Intersection avec la face CDHG : c'est le segment [MR]

Voir figure



**5. a)** Coordonnées de G : (1 : 1 : 1)
Distance du point G au plan (IJK) est :

$$D(G,(IJK)) = \frac{|4\times 1 + 2\times 1 + 2\times 1 - 5|}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

**La distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.**

**b)** F (1 ; 0 ; 1) G (1 : 1 : 1)
Rayon de la sphère S : GF = 1

La distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4} < 1$.

Donc **la sphère S et le plan (IJK) sont sécants.**
Leur intersection est un cercle, dont le centre Ω est le projeté orthogonal de G sur le plan (IJK).
Soit N un point de ce cercle.
Le triangle GΩN est rectangle en Ω.
D'après le théorème de Pythagore : $GN^2 = G\Omega^2 + \Omega N^2$

GN est égale au rayon de la sphère S soit 1.

GΩ est égale à la distance du point G au plan (IJK) soit $\frac{\sqrt{6}}{4}$

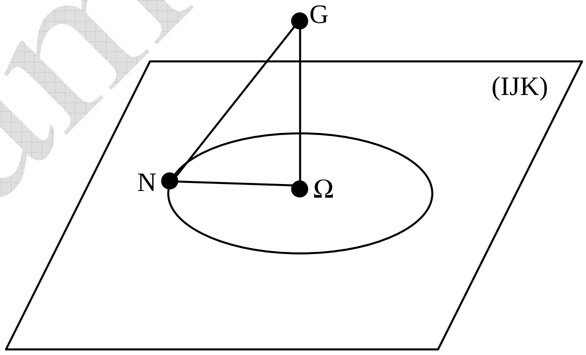
ΩN est le rayon du cercle d'intersection.

Donc $\Omega N^2 = GN^2 - G\Omega^2$

$\Omega N^2 = 1 - \frac{6}{16}$

$\Omega N^2 = \frac{10}{16}$

$\boldsymbol{\Omega N = \frac{\sqrt{10}}{4}}$



**Exercice 4 : (6 points)** *Commun à tous les candidats*

**1. a)** $z_A = 1 + i\sqrt{3}$

$|z_A| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ donc $z_A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ donc $\arg z_A = \frac{\pi}{3}$

Donc $\mathbf{z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$z_B = 2i$ donc $\mathbf{z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}}}$

**b)** Voir figure en fin d'exercice

**c)** $|z_A| = OA = 2$ et $|z_B| = OB = 2$

Donc OA = OB. **Le triangle OAB est donc isocèle en O**.

**2. a)** $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

**Un argument du quotient $\frac{z_A}{z_B}$ est $-\frac{\pi}{6}$.**

Or $\arg \frac{z_A}{z_B} = (\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA})$ Donc $\mathbf{(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{6}}$

**b)** La rotation transforme A en B donc l'angle de la rotation est : $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6}$

**L'écriture complexe de la rotation r est : $z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z$.**

**3. a)** On sait que OA = OB, donc les cercles Γ et Γ' ont le même rayon.
Comme l'image de A par r est B, alors on en déduit que **le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.**

**b)** $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

**c)** $C \in \Gamma$ donc AC = AO et $C \in \Gamma'$ donc BC = BO

Donc AC = BC = OA = OB.

Le quadrilatère OACB possède 4 côtés égaux, **c'est donc un losange.**

**d)** Comme OACB est un losange, ses diagonales ont le même milieu.
I étant le milieu de [AB], alors **I est le milieu de [OC].**

Donc $z_I = \frac{z_O + z_C}{2}$ soit $z_C = 2z_I$ soit $\mathbf{z_C = 1 + (2+\sqrt{3})i}$.

**4. a)** $AD = \left|z_D - z_A\right| = \left|2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}\right| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Le rayon du cercle Γ étant égal à OA = 2, on en déduit que **le point D appartient au cercle Γ.**
Voir Figure :
Pour placer D : c'est le point d'intersection entre le cercle Γ et l'axe des imaginaires purs car D est un imaginaire pur.

**b)** Pour placer D'.
D′ est l'image de D par la rotation r, donc D' appartient au cercle de centre O passant par D.
Comme D est un point du cercle Γ, alors D' est un point du cercle Γ', car le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.
Ces deux cercles se coupent en deux points.

D' est le point d'intersection tel que $(\overrightarrow{OD}\ ;\ \overrightarrow{OD'}) = \frac{\pi}{6}$

Voir figure.
D′ est l'image de D par la rotation r donc :

$$z_{D'} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times z_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times 2i\sqrt{3}$$

$$\mathbf{z_{D'} = -\sqrt{3} + 3i}$$

**5.** affixe de $\overrightarrow{DC}$ : $z_C - z_D = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)i - 2i\sqrt{3} = 1 + (2 - \sqrt{3})i$

affixe de $\overrightarrow{DD'}$ : $z_{D'} - z_D = -\sqrt{3} + 3i - 2i\sqrt{3} = -\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i$

an factoriasant : $-\sqrt{3} + (3 - 2\sqrt{3})i = -\sqrt{3}\left(1 + \left(2 - i\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\sqrt{3}\,\left(1 + (2 - \sqrt{3})i\right)$

Donc $\overrightarrow{DD'} = -\sqrt{3}\ \overrightarrow{DC}$

**Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires, donc les points C, D, D' sont alignés.**