<u>Exercice 1 :</u> (4 points) *Commun à tous les candidats*

1. a) On a $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ Les coordonnées de B sont (1, 1, 0)

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ Les coordonnées de F sont (1, 1, 1)

R est le barycentre des points pondérés (B, − 1) et (F, 2), donc les coordonnées de R sont :

$$\left(\frac{-1\times 1+2\times 1}{-1+2}, \frac{-1\times 1+2\times 1}{-1+2}, \frac{-1\times 0+2\times 1}{-1+2}\right).$$

Le point R a donc pour coordonnées (1, 1, 2).

b) $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ Les coordonnées de P sont (2, 0, 0)

Donc P est sur l'axe $\overrightarrow{OA}$, donc dans le plan (OAC)

$\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$ Les coordonnées de Q sont (0, 4, 0)

Donc Q est sur l'axe $\overrightarrow{OC}$, donc dans le plan (OAC)

Les coordonnées de R sont (1, 1, 2), donc le point R n'est pas dans le plan (OAC)

Les points P, Q et R ne peuvent donc pas être alignés.

c) Coordonnées de $\overrightarrow{RP}$: (1, – 1, – 2)

Coordonnées de $\overrightarrow{RQ}$: (– 1, 3, – 2)

$\overrightarrow{RP}.\overrightarrow{RQ} = 1 \times (-1) + (-1) \times 3 + (-2) \times (-2) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont orthogonaux.

Le triangle PQR est donc rectangle en R.

Rq : Il n'est pas isocèle : $RP = \sqrt{6}$ et $RQ = \sqrt{14}$

2. a) Les coordonnées de P sont (2, 0, 0) : $4 \times 2 + 2 \times 0 + 0 - 8 = 0$

Les coordonnées de Q sont (0, 4, 0) : $4 \times 0 + 2 \times 4 + 0 - 8 = 0$

Les coordonnées de R sont (1, 1, 2) $4 \times 1 + 2 \times 1 + 2 - 8 = 0$

Les points P, Q et R appartient donc au plan d'équation $4x + 2y + z - 8 = 0$.

Comme les points P, Q et R ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan.

On en déduit qu'une équation du plan (PQR) est $4x + 2y + z - 8 = 0$.

b) Les coordonnées de D sont (0, 0, 1) : $4 \times 0 + 2 \times 0 + 1 - 8 = -7 \neq 0$

Donc **le point D n'appartient pas au plan (PQR).**

3. a) Un vecteur normal au plan (PQR) d'équation $4x + 2y + z - 8 = 0$ est :

$\overrightarrow{n}$ de coordonnées (4 , 2, 1)

La droite (DH) est orthogonale au plan (PQR) car H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR), donc un vecteur directeur de la droite (DH) est aussi un vecteur normal au plan (PQR).

Ainsi, la droite (DH) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}(4, 2, 1)$ et passe par le point D(0, 0, 1).

Un système d'équations paramétriques de la droite (DH) est donc : $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = t + 1 \end{cases}$ **, t réel.**

b) H est le point d'intersection de la droite (DH) et du plan (PQR).

(PQR) : $4x + 2y + z - 8 = 0$ et (DH) : $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = t + 1 \end{cases}$, t réel.

On résout : $4 \times 4t + 2 \times 2t + t + 1 - 8 = 0$

$16t + 4t + t + 1 - 8 = 0$

$21t - 7 = 0$

$t = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

Soit $x = \frac{4}{3}$; $y = \frac{2}{3}$; $z = \frac{4}{3}$

Les coordonnées du point H sont $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

c) Les coordonnées de P sont (2, 0, 0).

Les coordonnées de R sont (1, 1, 2).

Les coordonnées de H sont $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Coordonnées de $\overrightarrow{PR}$: (– 1, 1, 2)

Coordonnées de $\overrightarrow{PH}$: $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

On constate que : $\overrightarrow{PH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$

Les vecteurs $\overrightarrow{PH}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont donc colinéaires et par conséquent **le point H appartient à la droite (PR).**

<u>Exercice 2 :</u> (4 points) *Commun à tous les candidats*

Question A :

Probabilité de A : soit on a 2 rouges soit 2 noires

Il y a $\binom{4}{2}$ possibilités de tirer deux boules noires

Il y a $\binom{3}{2}$ possibilités de tirer deux boules rouges

Il y a $\binom{7}{2}$ possibilités de tirer deux boules de l'urne.

Donc $P(A) = \dfrac{\binom{4}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \dfrac{6+3}{21}$ Soit $\mathbf{P(A) = \frac{3}{7}}$ **Proposition 1 : VRAIE**

Probabilité de B : on a 1 rouge et 1 noire

Il y a $\binom{4}{1}$ possibilités de tirer 1 boule noire

Il y a $\binom{3}{1}$ possibilités de tirer 1 boule rouge

$P(B) = \dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \dfrac{4\times 3}{21}$ Soit $\mathbf{P(B) = \frac{4}{7}}$ **Proposition 2 : FAUSSE**

Question B :

A et B sont indépendants ; donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

De plus : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Donc $P(A) \times P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(B) = \dfrac{P(A) - P(A \cup B)}{P(A) - 1}$

$\mathbf{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}-1} = \dfrac{-\frac{7}{20}}{-\frac{3}{5}} = \dfrac{7}{20}\times\dfrac{5}{3} = \mathbf{\dfrac{7}{12}}$ **Proposition 3 : VRAIE**

On a : $P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C)$

$P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A) - P(C) + P(A \cap C)$

$P(\overline{A \cup C}) = 1 - \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}$

$\mathbf{P(\overline{A \cup C}) = \dfrac{1}{5}}$ **Proposition 4 : FAUSSE**

Question C :

Pour k entier naturel inférieur à 4 : $P(X = k) = \binom{4}{k} p^k(1-p)^{4-k}$

Si P(X = 1) = 8P(X = 0) alors $\binom{4}{1} p(1-p)^3 = 8\binom{4}{0}(1-p)^4$

alors $4\,p(1-p)^3 = 8(1-p)^4$

alors $p = 2(1-p)$ $\quad p \neq 1$

alors $p + 2p = 2$

alors $\boldsymbol{p = \frac{2}{3}}$ **Proposition 5 : VRAIE**

Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = \binom{4}{1} \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^4$

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \left(\frac{4}{5}\right)^4$

Donc si $\boldsymbol{p = \frac{1}{5}}$ **alors P(X = 1) = P(X = 0)** **Proposition 6 : VRAIE**

Question D :

La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à : $P(X > 10)$

$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$

$P(X > 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x}dx$

$P(X > 10) = 1 + \left[e^{-\lambda x}\right]_0^{10}$

$P(X > 10) = 1 + e^{-10\lambda} - 1$

$P(X > 10) = e^{-10\lambda}$

$P(X > 10) = e^{-0,7}$

$\boldsymbol{P(X > 10) = 0,50}$ **à** $\boldsymbol{10^{-2}}$ **près.** **Proposition 7 : VRAIE**

Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à : $P_{X>10}(X > 20)$

$$P_{X>10}(X > 20) = \frac{P((X > 10) \cap P(X > 20))}{P(X > 10)}$$

$$P_{X>10}(X > 20) = \frac{P(X > 20)}{P(X > 10)}$$

$P(X > 20) = e^{-20\lambda}$ et $P(X > 10) = e^{-10\lambda}$ (voir calcul précédent)

Donc $P_{X>10}(X > 20) = \frac{e^{-20\lambda}}{e^{-10\lambda}} = e^{-10\lambda}$

$P_{X>10}(X > 20) =$ **0,50 à** $\boldsymbol{10^{-2}}$ **près.** **Proposition 8 : VRAIE**

<u>Exercice 3 :</u> (5 points) *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité*

1. a) A' = F(A) $\quad a' = a + i - \dfrac{1}{a}$

$$a' = i + i - \frac{1}{i}$$

$$a' = i + i + i$$

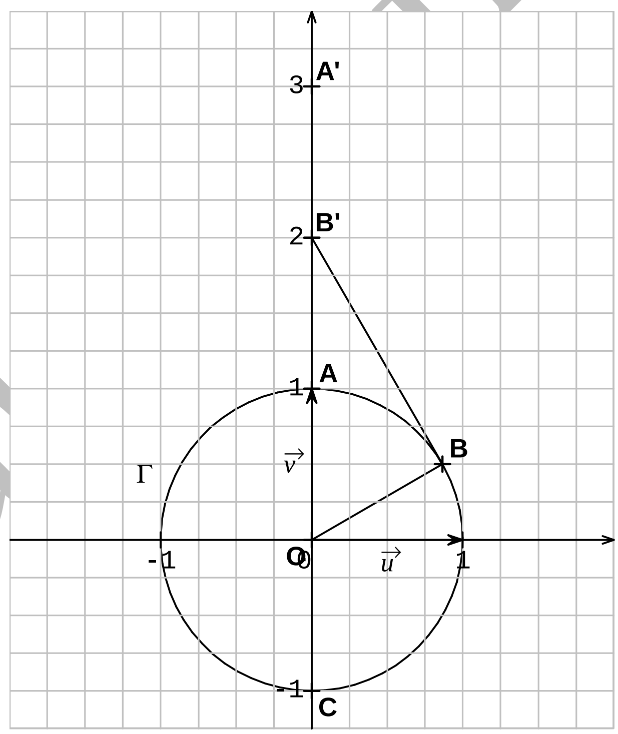
$$\mathbf{a' = 3i}$$

B' = F(B) $\quad b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - \dfrac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$$b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$b' = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\mathbf{b' = 2i}$$



b) Voir figure

c) $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i - e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$$\frac{-b}{b'-b} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{2i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

$$\frac{-b}{b'-b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}$$

$$\frac{-b}{b'-b} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}}$$

$$\mathbf{\frac{-b}{b'-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i}$$

d) $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{0-b}{b'-b}$

$\arg \dfrac{0-b}{b'-b} = (\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BO})\ [2\pi]$ $\qquad$ et $\arg \dfrac{\sqrt{3}}{3}i = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BO}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Donc le triangle OBB' est rectangle en B

2. a) Pour tout nombre complexe z,

$$\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = z^2-\frac{\sqrt{3}}{2}z+\frac{1}{2}iz+\frac{\sqrt{3}}{2}z-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{1}{2}iz-\frac{\sqrt{3}}{4}i-\frac{1}{4}$$
$$= z^2+iz-1$$

Donc : pour tout nombre complexe z, $z^2 + iz - 1 = \left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$.

b) Soit M d'affixe z un point du plan P privé du point O

$$\begin{aligned}
M \in (E) &\Leftrightarrow F(M) = O\\
&\Leftrightarrow z + i - \frac{1}{z} = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{z^2+iz-1}{z} = 0\\
&\Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0 \qquad (z \neq 0 \text{ car } M \neq O)\\
&\Leftrightarrow \left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 0\\
&\Leftrightarrow z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = 0 \text{ ou } z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = 0\\
&\Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \text{ ou } z = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Les affixes des points de l'ensemble (E) soit : $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

c) $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$ et $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$

Donc les points de (E) appartiennent à (Γ).

3. Soit θ un réel.

a) si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = e^{i\theta} + i - \frac{1}{e^{i\theta}}$

alors $z' = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta}$

alors $z' = \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos(-\theta) - i\sin(-\theta)$

alors $z' = \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos\theta + i\sin\theta$

alors $z' = i + 2i\sin\theta$

Donc si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)i$.

b) Soit M d'affixe z un point du cercle (Γ), alors z s'écrit $e^{i\theta}$ avec θ réel.
Donc $z' = (2\sin\theta + 1)i$.

Le point M' appartient donc à l'axe des imaginaires purs et son affixe z' est comprise entre 3i et – i en effet $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ et donc $-1 \leq 2\sin\theta + 1 \leq 3$
A' a pour affixe 3i.
Donc si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment [A'C] où C a pour affixe − i.

Exercice 3 : (5 points) *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

<u>Exercice 4 :</u> (7 points) *Commun à tous les candidats*

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur]0 ; + ∞[par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. Limite de f_0 en + ∞ :

$$\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Par produit : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$

2. Par produit de fonction dérivable sur]0 ; + ∞[, la fonction f_0 est dérivable sur]0 ; + ∞[.

Pour tout x de]0 ; + ∞[: $f_0'(x) = -1 \times \ln x + (-x) \times \dfrac{1}{x}$

$f_0'(x) = -\ln x - 1$

Signe de $f_0'(x)$:

$f_0'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = -1$
$\Leftrightarrow x = e^{-1}$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

$f_0'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x - 1 > 0$
$\Leftrightarrow \ln x < -1$
$\Leftrightarrow x < \dfrac{1}{e}$

Donc :

Sur]0 ; $\frac{1}{e}$[, $f_0'(x)$ est positive, donc f_0 est strictement croissante ;

Sur]$\frac{1}{e}$; + ∞[, $f_0'(x)$ est négative, donc f_0 est strictement décroissante ;

Pour x = $\frac{1}{e}$, f_0 admet un maximum.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

1. Par produit et somme de fonction dérivable sur]0 ; + ∞[, la fonction f_n est dérivable sur]0 ; + ∞[.

Pour x ∈]0 ; + ∞[, $f_n'(x) = -n - 1 \times \ln x - x \times \dfrac{1}{x}$

$f_n'(x) = -n - \ln x - 1$

$\boldsymbol{f_n'(x) = -n - 1 - \ln x}$

2. a) $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow -n - 1 - \ln x = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = -n - 1$
$\Leftrightarrow x = e^{-n-1}$

Le nombre e^{-n-1} est un nombre unique pour n donné.

Donc la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b) A_n est un point de (C_n) donc l'ordonnée de A_n est $f_n(e^{-n-1})$.

$$f_n(e^{-n-1}) = -ne^{-n-1} - e^{-n-1} \times \ln(e^{-n-1})$$
$$f_n(e^{-n-1}) = -ne^{-n-1} - e^{-n-1} \times (-n-1)$$
$$f_n(e^{-n-1}) = e^{-n-1}$$

Donc les coordonnées de A_n sont $(e^{-n-1} ; e^{-n-1})$.

Donc le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Voir figure en fin d'exercice

3. a) Pour $x \in]0 ; +\infty[$, $\quad f_n'(x) = -n-1-\ln x$

Signe de $f_n'(x)$:

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow -n-1-\ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -n-1$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-n-1}$$
$$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow -n-1-\ln x > 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x < -n-1$$
$$\Leftrightarrow x < e^{-n-1}$$

Donc

sur $]0 ; e^{-n-1}[$, $f_n'(x) > 0$, donc f_n est strictement croissante ;

sur $]e^{-n-1} ; +\infty[$, $f_n'(x) < 0$, donc f_n est strictement décroissante.

Limite de f_n en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0} -nx = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$

Limite de f_n en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} -nx = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x\ln x = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$

$f_n(e^{-n-1}) = e^{-n-1} > 0$

Donc :

Sur $]0 ; e^{-n-1}[$, f_n est continue et strictement croissante à valeur dans $]0 ; e^{-n-1}[$.

$0 \notin]0 ; e^{-n-1}[$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet de solution sur $]0 ; e^{-n-1}[$.

Sur $]e^{-n-1} ; +\infty[$, f_n est continue et strictement décroissante à valeur dans $]-\infty ; e^{-n-1}[$.

$0 \in]-\infty ; e^{-n-1}[$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]e^{-n-1} ; +\infty[$.

Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0 ; +\infty[$.

De plus on a : $f_n(e^{-n}) = -ne^{-n} - e^{-n}\ln e^{-n} = 0$

Par conséquent on en déduit que la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.

b) Le coefficient directeur de la tangente à (C_n) au point B_n vaut : $f_n'(e^{-n})$.

$$f_n'(e^{-n}) = -n-1-\ln e^{-n} = -1$$

Donc la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c) Voir figure en fin d'exercice

Partie C : Calculs d'aires

1. Voir figure en fin d'exercice

2. a) Les fonctions $x \mapsto x$ et ln sont continues sur $]0\ ;+\infty[$.

$u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

À l'aide d'une intégration par parties,

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2e^2}\ln\frac{1}{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{x}{2}dx$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx = \frac{1}{2e^2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} \qquad \ln\frac{1}{e} = -\ln e = -1$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx = \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2}$$

$$\boldsymbol{\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4e^2}}$$

b) La fonction f_0 est positive sur $[e^{-1}\ ; 1]$. Donc l'aire I_0, exprimée en unité d'aire est égale à :

$$I_0 = \int_{\frac{1}{e}}^{1} -x\ln x\,dx$$

$$I_0 = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx$$

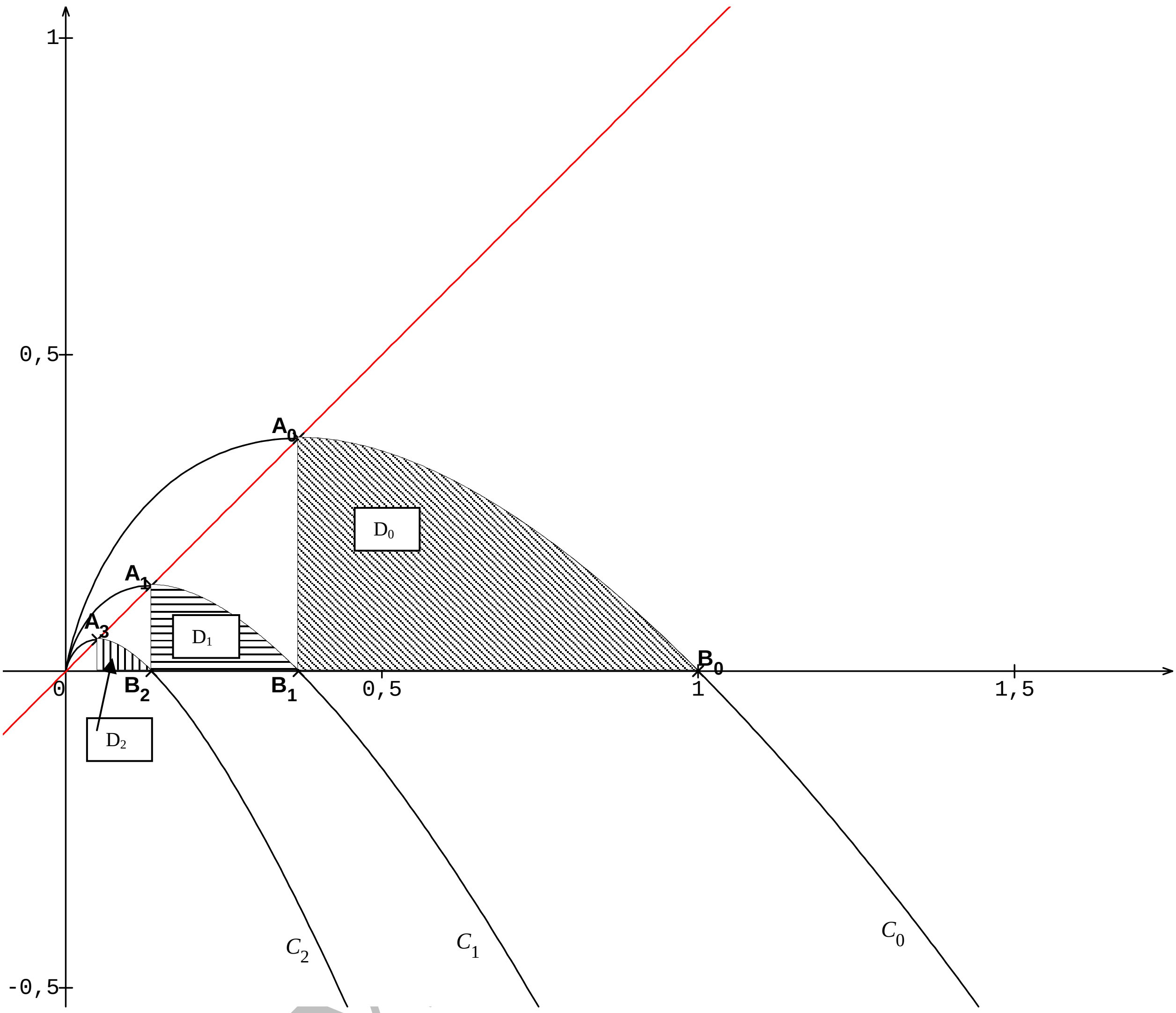
$$\boldsymbol{I_0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}}.$$

c) On admet que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{e}$.

Donc : $\boldsymbol{I_1 = \left(\frac{1}{e}\right)^2 I_0}$

$$I_2 = \left(\frac{1}{e}\right)^2 I_1$$

$$\boldsymbol{I_2 = \left(\frac{1}{e}\right)^4 I_0}$$


1
0,5
-0,5
0
0,5
1
1,5
A0
A1
A3
B0
B1
B2
D0
D1
D2
C0
C1
C2