<u>Exercice 1 :</u> (5 points)

1. a) Module et argument de $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

$$|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 4 = \mathbf{2}$$

Donc $z_A = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\quad$ $\mathbf{\arg z_A = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]}$

b) $z_A = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\quad$ $\mathbf{z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

c) Voir figure en fin d'exercice

2. a) B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc :

$z_B = z_A e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\mathbf{z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

b) $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_B = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$z_B = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\mathbf{z_B = -1 + i\sqrt{3}}$

c) Voir figure en fin d'exercice

3. $OA = |z_A| = 2$

B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

donc OA = OB et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$ **Donc le triangle AOB est équilatéral.**

Autre méthode ; calculer $AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}| = |-2| = 2$

Donc OA = OB = AB **Donc le triangle AOB est équilatéral.**

4. a) $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_C - z_O = (z_C - z_O)\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ ($z_O = 0$ est l'affixe du point O)

Donc C est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\mathbf{\frac{\pi}{4}}$.

b) Voir figure en fin d'exercice

Pour construire C, on utilise le fait que C est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

c) Ecriture trigonométrique de z_C :

$$z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_C = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$z_C = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$$
$$\mathbf{z_C = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$$

d) $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$z_C = z_A\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\mathbf{z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

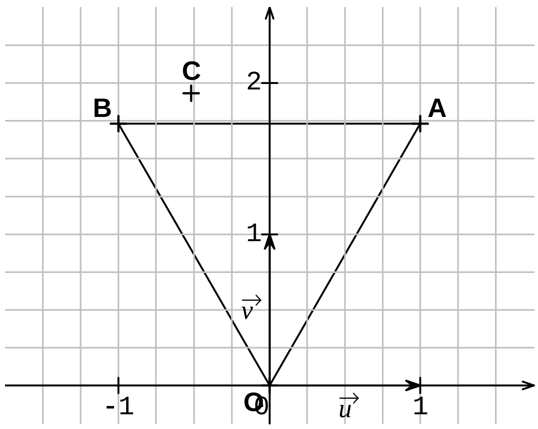
Ecriture algébrique de z_C :

$$z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$z_C = (1 + i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\mathbf{z_C = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$$

e) On a : $z_C = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$ et $z_C = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

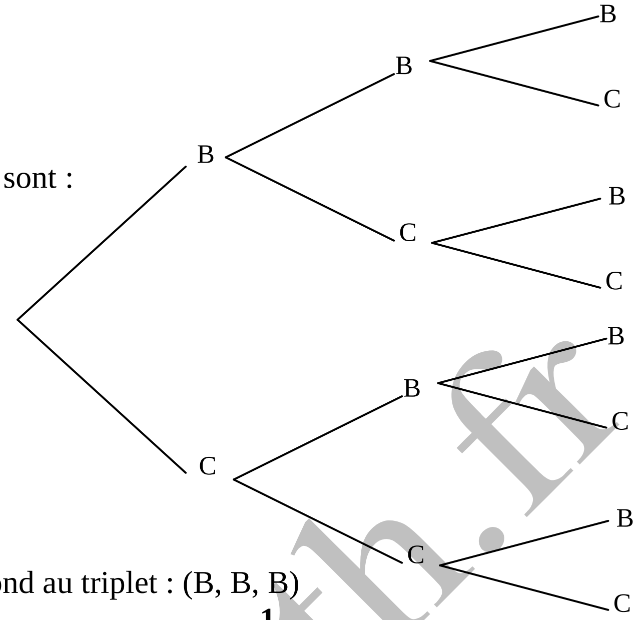
Donc $2\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ et $2\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

$$\mathbf{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$



<u>Exercice 2 :</u> (5 points)

<u>I Première stratégie :</u>



1. Les triplets possibles que l'on peut obtenir sont :
(B, B, B) ; (B, B, C)
(B, C, B) ; (B, C, C)
(C, B, B) ; (C, B, C)
(C, C, B) ; (C, C, C)

On peut donc obtenir 8 triplets différents.
(Rq : l'événement A n'apparait pas ici car le candidat choisit de ne pas laisser de questions sans réponse)

2. Le candidat n'ait fait aucune faute correspond au triplet : (B, B, B)
Donc la probabilité que le candidat n'ait fait aucune faute est $\frac{1}{8}$.

3. Le candidat ait fait une faute et une seule correspond aux triplets :
(B, B, C) ; (B, C, B) ; (C, B, B) ;
Donc la probabilité que le candidat ait fait une faute et une seule, est égale à : $\frac{3}{8}$ = 0,375.

4. a)

Triplets	(B, B, B)	(B, B, C)	(B, C, B)	(B, C, C)
Note obtenue X =	2 + 2+ 2 = 6	2 + 2 – 1 = 3	2 – 1 + 2 = 3	2 – 1 – 1 = 0
Triplets	(C, B, B)	(C, B, C)	(C, C, B)	(C, C, C)
Note obtenue X =	– 1 + 2 + 2 = 3	– 1 + 2 – 1 = 0	– 1 – 1 + 2 = 0	– 1 – 1 – 1 = – 3 note sera 0

Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 ; 3 et 6.

b) $P(X = 6) = \frac{1}{8}$ $P(X = 3) = \frac{3}{8}$ $P(X = 0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

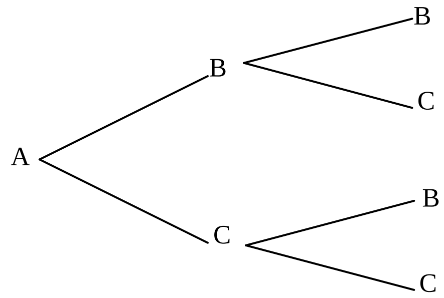
Loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = x_i$	0	3	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$ = 0,5	$\frac{3}{8}$ = 0,375	$\frac{1}{8}$ = 0,125

c) Espérance mathématique de la variable aléatoire X :
$E(X) = 0 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}375 + 6 \times 0{,}125$
E(X) = 1,875

II Deuxième stratégie :

1. Les triplets possibles que l'on peut obtenir sont :
(A, B, B) ; (A, B, C)
(A, C, B) ; (A, C, C)



On peut donc obtenir 4 triplets différents.

2.

a)

Triplets	(A, B, B)	(A, B, C)	(A C, B)	(A, C, C)
Note obtenue X =	2 + 2 = 4	2 – 1 = 1	– 1 + 2 = 1	1 – 1 – 1 = – 2 note sera 0

Les valeurs prises par la variable aléatoire Y sont : 0 ; 1 et 4.

b) $P(Y = 4) = \frac{1}{4}$ $P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $P(X = 0) = \frac{1}{4}$

Loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

$Y = y_i$	0	1	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$

c) Espérance mathématique de la variable aléatoire Y :
$E(Y) = 0 \times 0,25 + 1 \times 0,5 + 4 \times 0,25$
$\mathbf{E(Y) = 1,5}$

III Comparaison des stratégies :

E(X) > E(Y), c'est la première stratégie qui est la plus favorable au candidat.

Problème : **(10 points)**

Partie A: Étude d'une fonction auxiliaire

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = 2e^x + 2$
Sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $2e^x + 2 > 0$.
Donc sur $\mathbb{R}$, g'(x) est positive, donc **g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

2.a) $g(-2) = 2e^{-2} - 1 \approx -0,73 < 0$ et $g(-1) = 2e^{-1} + 1 \approx 1,74 > 0$.
Sur $[-2 ; -1]$, g est dérivable et strictement croissante à valeurs dans $[g(-2) ; g(-1)]$.
Or $0 \in [g(-2) ; g(-1)]$
Donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2 ; -1]$.

b) $g(-1,7) \approx -0,03$ et $g(-1,6) \approx 0,20$
L'arrondi au dixième de α est $-1,7$.

c) Signe de g(x).
Sur $]-\infty ; \alpha[$, g(x) est négative ;
Sur $]\alpha ; +\infty[$, g(x) est positive ;
Pour $x = \alpha$, g(x) est nulle.

Partie B: Étude de la fonction *f*

1. Limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
Par somme : $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2. Limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 3x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Par somme : $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

3. Soit *P* la parabole d'équation $y = x^2 + 3x$.

a) $f(x) - (x^2 + 3x) = 2e^x + x^2 + 3x - x^2 - 3x = 2e^x$

Donc $\mathbf{\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x^2 + 3x)] = 0.}$
b) On peut en déduire que la parabole P est asymptote à la courbe *C* au voisinage de $-\infty$.

c) $f(x) - (x^2 + 3x) = 2e^x$
Sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$
Donc sur $\mathbb{R}$: $f(x) - (x^2 + 3x) > 0$ soit $f(x) > (x^2 + 3x)$

Sur $\mathbb{R}$, la courbe *C* est au dessus de la parabole *P*.

4. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{f'(x) = 2e^{x} + 2x + 3}$
$\boldsymbol{f'(x) = g(x)}$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$
Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.
Donc :
Sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$, $f'(x)$ est négative ; donc f est décroissante
Sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ est positive ; donc f est croissante
Pour $x = \alpha$, $f'(x)$ est nulle ; donc f admet un minimum en α.

Tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

c) $f(\alpha) = 2e^{\alpha} + \alpha^2 + 3\alpha$ $\alpha = -1{,}7$
$\boldsymbol{f(\alpha) = -1{,}8}$ **à** $\boldsymbol{10^{-1}}$ **près.**

5. Une équation de la tangente T à la courbe *C* au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$f'(0) = 2 + 3 = 5$ et $f(0) = 2$
Une équation de la tangente T à la courbe *C* au point d'abscisse 0 est : $\boldsymbol{y = 5x + 2}$.

6. Voir figure en fin d'exercice

Partie C : Calcul d'aire

1. Voir figure en fin d'exercice
2. a) Sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$: $2e^{x} > 0$ et $x^2 + 3x > 0$ donc $f(x) > 0$.

Donc l'aire A, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan hachurée est égale à : $A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

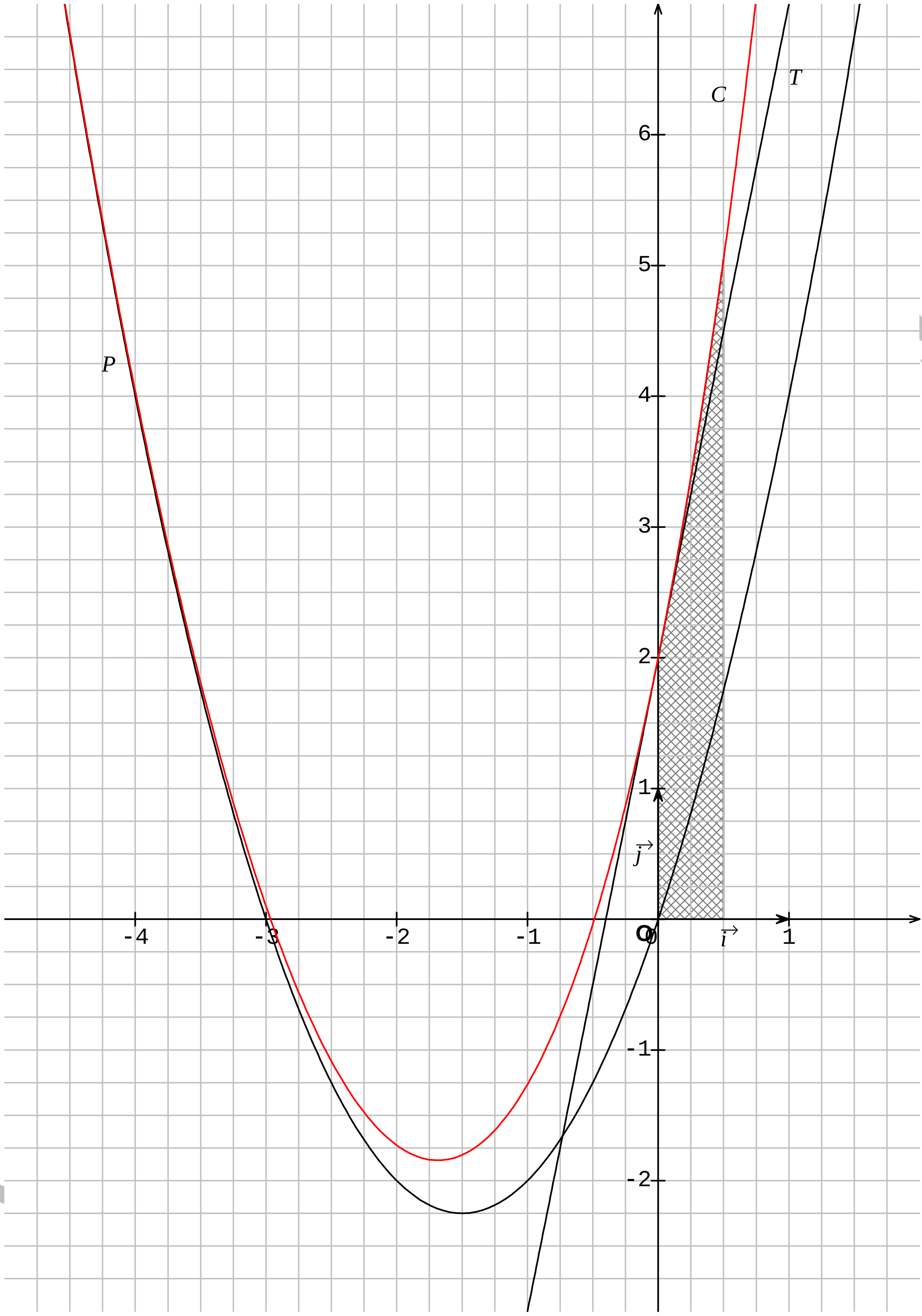
Une primitive F de la fonction f sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$ est $F(x) = 2e^{x} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

Donc $A = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0)$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{1/2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{8} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{4} = 2e^{1/2} + \frac{5}{12} \qquad F(0) = 2$$

$$A = 2e^{1/2} + \frac{5}{12} - 2 \qquad \boldsymbol{A = 2e^{1/2} - \frac{19}{12}}$$

b) 1 unité d'aire vaut : 2×2 car l'unité graphique est de 2 cm sur chacun des axes.
Donc $A = 4 \times \left(\boldsymbol{2e^{1/2} - \frac{19}{12}}\right)$ en cm^2 $\boldsymbol{A = 6{,}86\ cm^2}$ **au centième près.**


C
T
P
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-4
-3
-2
-1
O
0
1